N° d'enregistrement au C.N.R.S.

A.O. 12.629

# THESE
# de
# DOCTORAT d'ETAT
# ès Sciences Physiques

présentée à

l'Université Pierre et Marie Curie

·Paris 6·

par

**GIRARDI Louis**

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la Thèse : EFFETS DYNAMIQUES DES CHARGES ROULANTES. APPLICATION AUX PONTS FERROVIAIRES.

2ème Sujet : Propositions données par l'Université sur les glissements de terrain.

SOUTENUE LE 29 JUIN 1976 DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

| | | |
|---|---|---|
| MM. | SIESTRUNCK | PRESIDENT |
| | VICHNIEVSKY [redacted] | EXAMINATEUR |
| | PRUD'HOMME | " " |
| | KAMMERER J.B. | " " |
| | KAMMERER A. | RAPPORTEUR |
| | CHAMBRON | " " |

N° d'enregistrement au C.N.R.S.

A.O. 12.629

# THESE
# de
# DOCTORAT d'ETAT
# ès Sciences Physiques

présentée à

l'Université Pierre et Marie Curie

·Paris 6·

par

## GIRARDI Louis

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la Thèse : EFFETS DYNAMIQUES DES CHARGES ROULANTES. APPLICATION AUX PONTS FERROVIAIRES.

2ème Sujet : Propositions données par l'Université sur les glissements de terrain.

SOUTENUE LE 29 JUIN 1976 DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

| | | |
|---|---|---|
| MM. | SIESTRUNCK | PRESIDENT |
| | ALAIS | EXAMINATEUR |
| | PRUD'HOMME | " " |
| | KAMMERER J.B. | " " |
| | KAMMERER A. | RAPPORTEUR |
| | CHAMBRON | " " |

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Ce rapport est le résultat d'une étude effectuée, dans le cadre de la préparation d'un Doctorat d'Etat, au Département des Ouvrages d'Art de la SNCF sur un sujet proposé par Monsieur Chambron.

La partie programmation et calcul a été réalisée au Centre de Calcul du Département des Ouvrages d'Art.

Les essais ont été effectués sur un modèle réduit construit par l'Atelier de Mécanique de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures et avec le concours, pour la partie mesures, du Département des Etudes et Recherches "voie" dirigé par Monsieur Prud'homme.

* *
*

Je tiens à remercier Monsieur Siestrunck d'avoir accepté de présider ce jury et d'avoir suivi la progression de cette étude.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Albert Kammerer pour ses conseils qui m'ont permis d'orienter et de mener à bien ce travail de recherche.

Messieurs Prud'homme, Chambron, Alais et J.B. Kammerer ont bien voulu s'y intéresser pour ses aspects pratiques et théoriques ; je les en remercie vivement.

# I - POSITION DU PROBLEME

Les méthodes usuelles de la Résistance des Matériaux permettent de calculer les déformations et les contraintes d'une structure soumise à des sollicitations variables ou non mais dont la loi de variation en fonction du temps est connue.

Dans le cas particulier des ponts les sollicitations sont des charges mobiles formées de masses roulantes non suspendues supportant des masses suspendues par l'intermédiaire de ressorts et d'amortisseurs. Les forces appliquées dépendent donc d'une part des accélérations verticales des masses roulantes et du mouvement des masses suspendues et d'autre part des forces d'inertie mises en jeu dans le pont du fait de son mouvement. Leur loi de variation en fonction du temps n'est pas en général connue.
La mise en circulation de trains à grande vitesse nécessite à la fois la connaissance des déformations et des contraintes produites par ces diverses sollicitations et la connaissance du mouvement et des accélérations produites dans les véhicules au cours du passage des convois, ceci pour des raisons de confort et de stabilité.

Les solutions proposées sous forme analytique comportent des hypothèses simplificatives qui en limitent la portée :

- les études de ZIMMERMANN [1] supposent que la masse de la poutre est négligeable vis à vis de celle des masses roulantes qui la parcourent,

- la solution de TIMOSHENKO [2] prend en compte la masse du pont et donc les forces d'inertie mises en jeu dans le pont mais néglige les forces dues aux accélérations verticales des masses non suspendues.

Il faut ajouter que ces deux solutions ne tiennent pas compte du fait que les convois sont des systèmes à plusieurs degrés de liberté dont le mouvement dépend de celui du pont.

Il existe cependant des études numériques, essentiellement basées sur les travaux d'INGLIS [3], puis de FRYBA [4], dans lesquelles ces hypothèses simplificatrices ne sont pas faites. La méthode, du type GALERKINE, utilisée par ces auteurs consiste à écrire la solution sous forme d'une série. L'équation aux dérivées partielles du problème général est ainsi ramenée à un système d'équations différentielles. La plupart des programmes de calcul actuellement existants semblent s'inspirer de cette méthode. En France la programmation de cette méthode sur ordinateur a été faite par COUVERT [5] dans le cas plus général de véhicules possédant deux étages de suspension et pour des ponts à plusieurs travées continues.

En ce qui concerne la théorie de base d'INGLIS les forces dues aux accélérations verticales des masses non suspendues sont remplacées par des forces proportionnelles à l'enfoncement du rail sous la masse, ce qui suppose la voie reposant sur un support élastique.
Du point de vue purement numérique, il faut tronquer rapidement le développement en série car en pratique les temps de calcul sur ordinateur deviennent considérables avec seulement quatre termes, ce qui impose de sérieuses réserves sur la convergence du procédé, d'autant plus que les contraintes doivent être calculées par double dérivation de la solution tronquée. Les résultats obtenus semblent d'ailleurs dans certains cas ne pas correspondre aux mesures expérimentales.

D'autre part l'importance des temps de calcul est un obstacle à une étude systématique. Ajoutons enfin que des travaux théoriques récents [6], [7], [8] montrent que la convergence d'un tel procédé est douteuse pour des vitesses faibles ou des ressorts très "durs".

A partir de nombreux résultats expérimentaux connus et également des résultats de calcul les Administrations ferroviaires ont mis au point des formules enveloppes.

Dans les plus anciennes [9] la vitesse des convois n'intervient pas de façon directe.
Les derniers règlements de l'Union Internationale des Chemins de Fer [10] proposent des formules dans lesquelles intervient la vitesse mais non pas les

suspensions des véhicules et dont le fondement est essentiellement expérimental.

Le but de l'étude que l'on a entreprise est d'aboutir, sans faire les simplifications citées, à une méthode de résolution numérique "convergente" et suffisamment économique sur ordinateur pour effectuer une étude systématique de manière à analyser par le calcul l'influence des paramètres essentiels dont certains sont déjà apparus dans les études précédentes.

Une première partie de ce rapport est consacrée à la mise en équation qui permet de faire apparaître les paramètres sans dimension déterminant la solution.

La méthode de résolution est ensuite exposée ; c'est une méthode de différences finies implicite à pas liés, la discrétisation intervenant sur l'espace et le temps. Elle a été formulée de deux façons différentes, ceci afin de confirmer la validité de la solution trouvée.

- dans la première on discrétise directement les dérivées partielles en les remplaçant par des différences.

- dans la seconde [6] l'équation aux dérivées partielles est mise sous forme d'une équation intégrale à noyau symétrique que l'on discrétise.

Ces deux méthodes conduisent à des résultats identiques.

Une dernière partie consiste à comparer les résultats de calcul avec des résultats d'essais sur modèle réduit et sur des ouvrages réels. Le modèle expérimental permet de réaliser avec le plus d'exactitude possible les hypothèses de calcul et donc d'apporter une bonne confirmation des résultats théoriques.

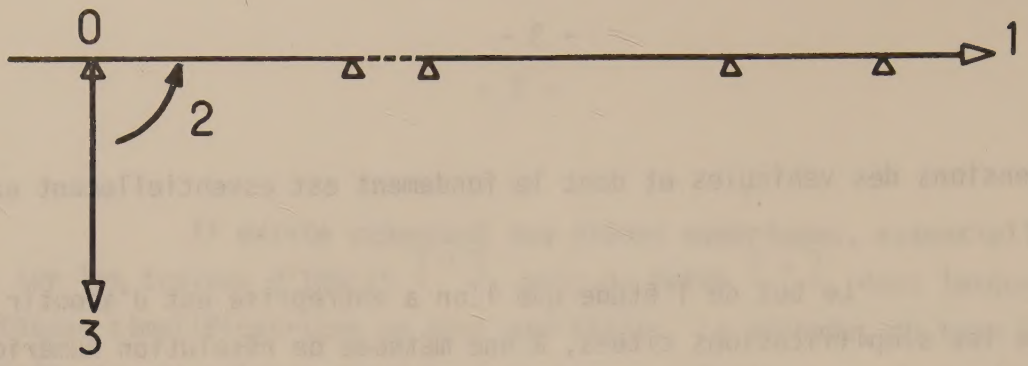



Fig.1

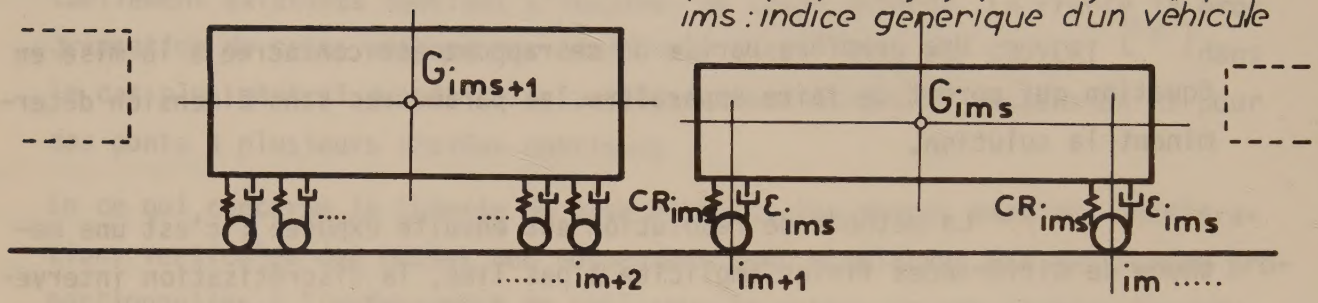



Fig.2

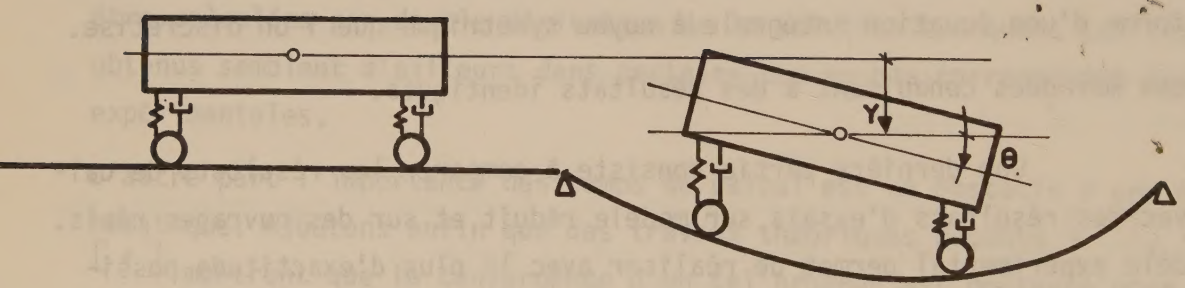
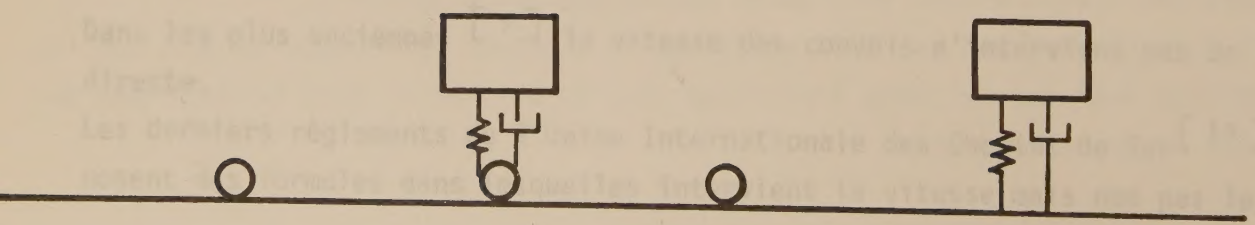



Fig.3



## II - MISE EN EQUATION

### 1 - CONVENTIONS ET NOTATIONS

Les axes de référence, notés 1, 2 et 3 ont pour origine l'appui de gauche du pont représenté par sa ligne moyenne (fig. 1).

L'axe 1 est orienté de gauche à droite ; les abcisses x sont repérées suivant cet axe.

L'axe 3 est orienté vers le bas ; les déformations du pont et les déplacements verticaux des masses suspendues seront donc comptées positivement vers le bas.

L'axe 2 forme avec les deux autres un trièdre direct ; les moments de flexion et les rotations sont mesurées suivant cet axe.

Les ouvrages envisagés sont des poutres droites iso- ou hyperstatiques dont la section peut varier en fonction de l'abscisse.

Les convois qui les parcourent sont constitués , dans le cas le plus général, d'une succession de masses suspendues supportées par des masses non suspendues par l'intermédiaire de ressorts et d'amortisseurs (fig. 2).

Pour un même véhicule les ressorts et amortisseurs sont identiques ; de plus les diverses masses non suspendues sont disposées symétriquement par rapport au centre de gravité des masses suspendues.

Le déplacement vertical et la rotation de la masse suspendue sont repérés par rapport à la position d'équilibre statique (fig. 3).

Les convois peuvent être plus simples et consister en des masses non suspendues isolées (éventuellement nulles) supportant ou non des masses suspendues (fig. 4).

## 2 - EQUATION DE VIBRATION DU PONT

Considérons dans un premier temps une poutre sur deux appuis simples de longueur $\ell$ parcourue par un véhicule à la vitesse v. La flèche u (x, t) du pont est solution de l'équation de vibration.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E\,\dot{I}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + \delta\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta\, g \qquad (2.1)$$

E est le module d'élasticité du matériau, $\dot{I}$ et $\delta$ sont le moment d'inertie et la masse par unité de longueur de l'ame pleine que forme la section à l'abscisse x.

Les conditions aux limites, initiales et au passage par l'essieu im sont :

$$(2.2)\quad \begin{cases} \text{pour } x = o \text{ et } \ell & u = o = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{pour } t = o \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = o & u(x) = u_o(x) \\ \Delta\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(E\,I\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]_{x = x_{im}} & = F_{im}(t) \quad (\Delta f = f^{+} - f^{-}) \end{cases}$$

$u_o(x)$ est la solution de l'équation $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[EI\,\dfrac{d^2 u_o}{dx^2}\right] = \delta\, g$

vérifiant les conditions aux limites

$$u_o = o = \frac{d^2 u_o}{dx^2} \quad \text{pour} \quad x = o \quad \text{et} \quad x = \ell$$

$F_{im}(t)$ est la force exercée par l'essieu (im) sur le pont à l'instant t.

Si maintenant le pont est une poutre continue hyperstatique reposant sur plusieurs appuis il faut ajouter aux conditions précédentes les conditions au passage par les appuis intermédiaires

$$(2.3)\quad \begin{cases} u = o \\ \Delta\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = o \\ \Delta\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = o \end{cases}$$

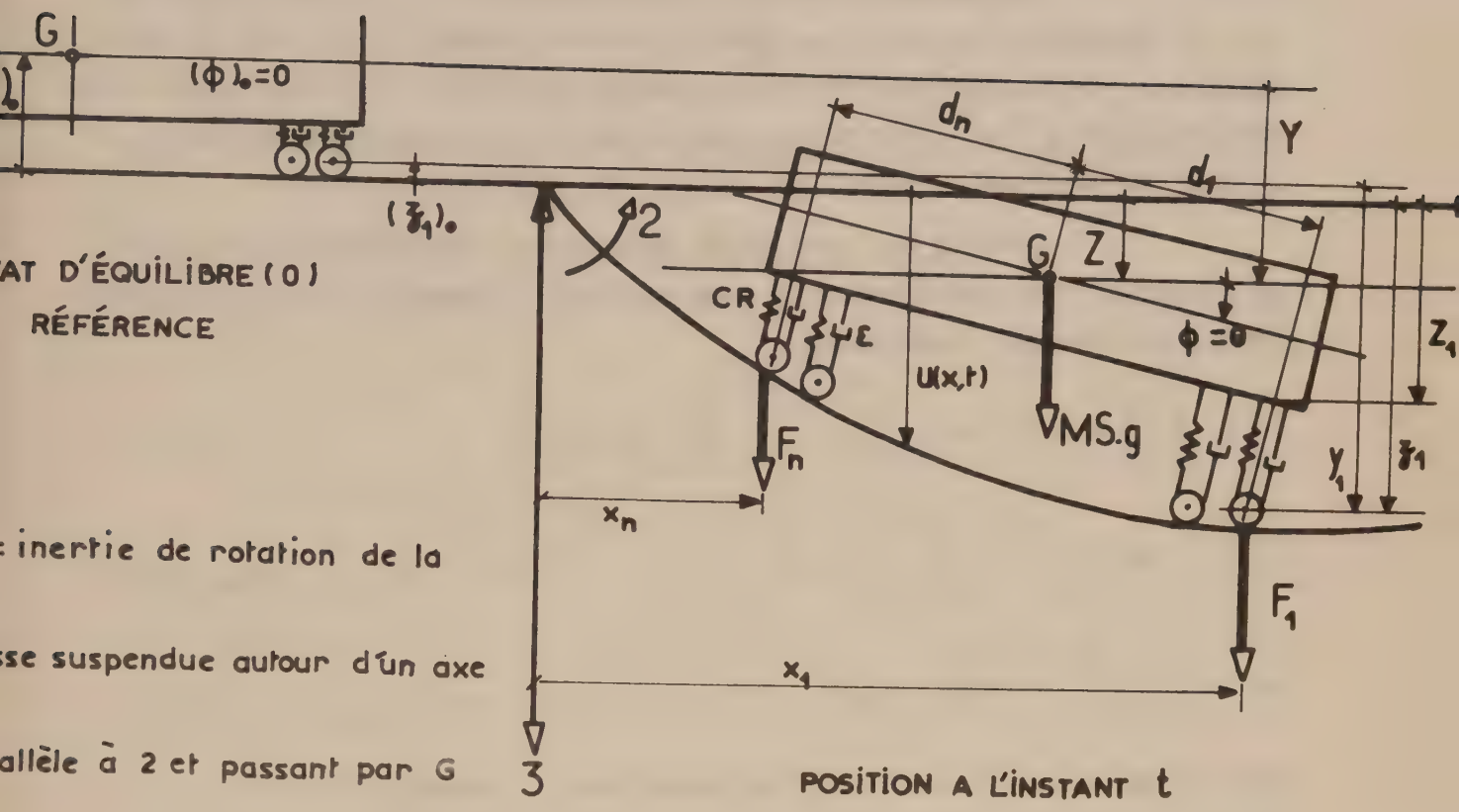

G
$(\phi)_0=0$
$(z_1)_0$
AT D'ÉQUILIBRE (0)
RÉFÉRENCE
: inertie de rotation de la
sse suspendue autour d'un axe
allèle à 2 et passant par G
2
3
$d_n$
$d_1$
Y
G
Z
CR
$\phi=\theta$
$Z_1$
u(x,t)
MS.g
$F_n$
$y_1$
$z_1$
$x_n$
$F_1$
$x_1$
POSITION A L'INSTANT t

fig. 5

## 3 - EQUATIONS DU MOUVEMENT DU VEHICULE

Le mouvement vertical d'un véhicule à $n$ essieux dépend de $(n + 2)$ paramètres qui sont les deux degrés de liberté $Z$ et $\phi$ de la masse suspendue (déplacement vertical du centre de gravité et rotation autour d'un axe parallèle à l'axe 2 et passant par G) et les $n$ degrés de liberté $z_1$, ..., $z_n$ du mouvement vertical des masses non suspendues (fig. 5).

Pour un tel système on peut définir une énergie cinétique T, un potentiel V et une fonction de dissipation W dépendant des $(n + 2)$ paramètres définissant le mouvement

$$T = \frac{1}{2}\left[MS\,(\dot{Z})^2 + J\,(\dot{\phi})^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\,(\dot{z}_i)^2\right]$$

$$V = -MS\,g\,Z - \sum_{i=1}^{n} m_i\,g\,z_i + \sum_{i=1}^{n} F_i(t)\,z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} CR_i(Z_i - z_i)^2$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\dot{Z}_i - \dot{z}_i)^2$$

ces grandeurs une fois définies les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

donnent pour $q_i = Z$

$$MS.\ddot{Z} - MS.g + \sum_{i=1}^{n} CR_i\,(Z_i - z_i)\frac{\partial Z_i}{\partial Z} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\,(\dot{Z}_i - \dot{z}_i)\frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial \dot{Z}} = 0$$

si l'on suppose que l'angle $\phi$ demeure petit

$$Z_i = Z - d_i\phi \qquad (3.1)$$

et par conséquent

$$MS.\ddot{Z} = MS.g - \sum_{i=1}^{n} CR_i\,(Z_i - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\,(\dot{Z}_i - \dot{z}_i) \qquad (3.2)$$

de même pour $q_i = \phi , z_1, \ldots z_n$

$$J.\ \ddot{\phi} = \sum_{i=1}^{n} CR_i(Z_i - z_i)d_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\dot{Z}_i - \dot{z}_i)d_i \qquad (3.3)$$

$$m_i \ddot{z}_i = m_i g + CR_i (Z_i - z_i) + \varepsilon_i(\dot{Z}_i - \dot{z}_i) - F_i(t) \qquad (3.4)$$

à l'équilibre affectons variables et paramètres de l'indice 0

$$0 = MS. g - \sum_{i=1}^{n} CR_i \left[(Z_i)_0 - (z_i)_0\right]$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} CR_i \left[(Z_i)_0 - (z_i)_0\right] d_i$$

$$0 = m_i g + CR_i \left[(Z_i)_0 - (z_i)_0\right] - (F_i)_0$$

posons

$$Z = (Z)_0 + Y$$

$$\phi = (\phi)_0 + \Theta$$

$$z_i = (z_i)_0 + y_i$$

et choisissons comme nouveaux paramètres Y, $\Theta$ et $y_i$ en utilisant (3.1) les équations d'équilibre deviennent

$$(3.5)\begin{cases} 0 = MS. g - \sum_{i=1}^{n} CR_i \left[(Z)_0 - d_i (\phi)_0 - (z_i)_0\right] \\ 0 = \sum_{i=1}^{n} CR_i \left[(Z)_0 - d_i(\phi)_0 - (z_i)_0\right] d_i \\ 0 = m_i g + CR_i \left[(Z)_0 - d_i(\phi)_0 - (z_i)_0\right] - (F_i)_0 \end{cases}$$

faisons le changement de variable annoncé dans (3.2), (3.3), (3.4) en tenant compte des relations (3.5).

$$MS.\ddot{Y} = -\sum_{i=1}^{n} CR_i\,(Y - d_i\theta - y_i) - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\dot{Y} - d_i\dot{\theta} - \dot{y}_i)$$

$$J\ddot{\theta} = \sum_{i=1}^{n} CR_i\,(Y - d_i\theta - y_i)\,d_i - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\dot{Y} - d_i\dot{\theta} - \dot{y}_i)\,d_i$$

$$m_i\ddot{y}_i = CR_i\,(Y - d_i\theta - y_i) + \varepsilon_i(\dot{Y} - d_i\dot{\theta} - \dot{y}_i) + (F_i)_o - F_i(t)$$

Choisissons comme état d'équilibre (o) de référence l'état d'équilibre du système au repos avant son entrée sur l'ouvrage. Dans cet état on a

$$(3.6)\qquad \begin{cases} (z_1)_o = \ldots = (z_n)_o \\ (\phi)_o = 0 \end{cases}$$

et par conséquent $\phi = \theta$.

Si de plus on admet que les ressorts et amortisseurs sont identiques ($CR_i = CR$, $\varepsilon_i = \varepsilon$ ) pour un même véhicule et que les masses non suspendues sont disposées symétriquement par rapport à G ( $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$), alors les équations du mouvement sont découplées

$$MS.\ddot{Y} = -\,CR(nY - \sum_{i=1}^{n} y_i) - \varepsilon\,(n\dot{Y} - \sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i) \qquad (3.7)$$

$$J.\ddot{\theta} = CR\left[-\theta \sum_{i=1}^{n} (d_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i y_i\right] + \varepsilon\left[-\dot{\theta} \sum_{i=1}^{n} (d_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i\dot{y}_i\right] \qquad (3.8)$$

d'après (3.5) et (3.6)

$$(F_i)_o = m_i\,g + \frac{MS\,g}{n}$$

$(F_i)_o$ peut donc s'éliminer dans l'équation en $y_i$

$$m_i\ddot{y}_i = CR(Y - d_i\,\theta - y_i) + \varepsilon(\dot{Y} - di\,\dot{\theta} - \dot{y}_i) + m_i\,g + \frac{MS\,g}{n} - F_i(t) \qquad (3.9)$$

L'équation (3.9) montre que la force $F_i(t)$ exercée par l'essieu $i$ du véhicule considéré dépend de la masse non suspendue $m_i$ de l'essieu et de son accélération, mais aussi du mouvement du véhicule par l'intermédiaire de $Y, \theta$ et de ses dérivées.

Or, d'après la troisième condition (2.2)

$$\Delta \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( E \dot{I} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right]_{x = x_i} = F_i(t)$$

ceci traduit l'interaction entre le mouvement du pont caractérisé par la flèche $u(x, t)$ et le mouvement du véhicule dont dépend la force $F_i(t)$.

## 4 - ECRITURE DES EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

Considérons tout d'abord l'équation de vibration (2.1) et les conditions (2.2)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E \dot{I} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta g$$

$$\begin{cases} \text{pour } x = o \text{ et } \ell & u = o = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{pour } t = o \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = o & u(x, o) = u_o(x) \\ \Delta \left[ \dfrac{\partial}{\partial x} \left( E \dot{I} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right]_{x = x_{im}} & = F_{im}(t) \end{cases}$$

$im$ est l'indice général d'un essieu ; si $v$ est sa vitesse et $(t_o)_{im}$ son instant d'entrée sur le pont son abscisse est $x_{im} = v \left[ t - (t_o)_{im} \right] (t > (t_o)_{im})$.

L'inertie $\dot{I}$ et la masse par unité de longueur $\delta$ pouvant être variables sont rapportées aux valeurs $\dot{I}_o$ et $\delta_o$ dans la section sur appui de gauche

$$\dot{I} = \underline{\dot{I}} \cdot \delta_o$$

$$\delta = \underline{\delta} \cdot \delta_o$$

en faisant le changement de variables

$$\xi = \frac{x}{\ell} \qquad \tau = \frac{t}{\sqrt{\frac{\delta_o \ell^4}{E I_o}}}$$

et le changement de fonction $U(\xi, \tau) = \frac{u}{f}$

où f est une longueur de référence les équations (2.1) et (2.2) deviennent

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\underline{\dot{I}} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right] + \underline{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\delta_o g \ell}{\left(\frac{E I_o f}{\ell^3}\right)} \underline{\delta} \qquad (4.1)$$

$$(4.2) \begin{cases} \text{pour } \xi = o \quad \text{et} \quad \xi = 1 \qquad U = o = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\ \text{pour } \tau = o \qquad \dfrac{\partial U}{\partial \tau} = o \qquad U(\xi) = U_o(\xi) \\ \Delta\left[\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\underline{\dot{I}} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)\right]_{\xi = \frac{v}{\ell}\sqrt{\frac{\delta_o \ell^4}{E I_o}}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]} = \dfrac{F_{im}(t)}{\left(\frac{E I_o f}{\ell^3}\right)} \end{cases}$$

Dans les équations (4.1) et les conditions (4.2) ne figurent plus que des quantités sans dimension ; si l'on choisit pour f la flèche produite par la somme M des masses ou par la masse du premier véhicule constituant le convoi, concentrée au milieu de la travée isostatique de longueur $\ell$ et d'inertie $\dot{I}_o$

$$f = \frac{Mg\ell^3}{48 E I_o}$$

on posera

$$K' = \frac{M}{\delta_o \ell} \qquad \text{et} \qquad K = \left[\ell \; v \sqrt{\frac{\delta_o}{E I_o}}\right]^2$$

Le second membre de (4.1) vaut $\frac{48}{K'}$ .

La solution $U(\xi, \tau)$ dépend donc, en plus de $\underline{\dot{I}}$ et $\underline{\delta}$, des paramètres sans dimension K' et K et des paramètres sans dimension intervenant dans le second membre $\frac{F_{im}(t)}{\left(\frac{E I_o f}{\ell^3}\right)}$ lorsque l'on explicite $F_{im}(t)$. Pour cela écrivons tout

d'abord les équations différentielles du mouvement du véhicule sous forme adimensionnelles en utilisant les relations.

$$Y = f\,\underline{Y} \qquad y_i = f\,\underline{y}_i$$

$$\frac{d}{dt} = \sqrt{\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}\,\frac{d}{d\tau} \; ; \; \frac{d^2}{dt^2} = \frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}\,\frac{d^2}{d\tau^2}$$

pour (3.7)

$$\frac{d^2\underline{Y}}{d\tau^2} + n\,\frac{\varepsilon}{MS\sqrt{\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}}\,\frac{d\underline{Y}}{d\tau} + n\,\frac{CR}{MS\,\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{MS\sqrt{\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}}\,\frac{d\underline{y}_i}{d\tau} + \frac{CR}{MS\,\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}\,\underline{y}_i\right) \qquad (4.3)$$

pour (3.8), en divisant par $J\,\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon (d_i)^2}{J\sqrt{\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}}\,\frac{d\theta}{d\tau} + \sum_{i=1}^{n}\frac{CR(d_i)^2}{J\,\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}\,\theta = -\sum_{i=1}^{n}\frac{CR d_i f}{J\,\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}\,\underline{y}_i + \frac{\varepsilon d_i f}{J\sqrt{\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}}\,\frac{d\underline{y}_i}{d\tau}$$

soit $D$ la distance entre essieux extrêmes ; en multipliant les deux membres par $\frac{D}{f}$ il vient :

$$\frac{d^2\left(\frac{\theta D}{f}\right)}{d\tau^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon (d_i)^2}{J\sqrt{\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}}\,\frac{d\left(\frac{\theta D}{f}\right)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{n}\frac{CR\,(d_i)^2}{J\,\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}\left(\frac{\theta D}{f}\right) =$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{CR\,d_i f}{J\,\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}\,\underline{y}_i\,\frac{D}{f} + \frac{\varepsilon\, d_i f}{J\sqrt{\frac{E\dot{I}_o}{\delta_o \ell^4}}}\,\frac{d\underline{y}_i}{d\tau}\,\frac{D}{f} \qquad (4.4)$$

transformons enfin l'équation (3.9) qui donne la force $F_i$ exercée par l'essieu (i) en divisant les deux membres par $\frac{E\dot{I}_o}{\ell^3} f$ et en introduisant la quantité $\frac{\theta D}{f}$

## ÉQUATION DE VIBRATION

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\underline{I}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right] + \delta\,\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{48}{K'}\,\delta \qquad (4.6)$$

## PARAMÈTRES ET FONCTIONS SANS DIMENSION

$$\underline{I} = \frac{I}{I_o} \qquad \underline{\delta} = \frac{\delta}{\delta_o}$$

$$K' = \frac{M}{\delta_o \ell} \qquad U = \frac{u}{\frac{Mg\ell^3}{48\,EI_o}}$$

## CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES

$\xi = 0$ et $\xi = 1$ $\qquad U = 0 = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$

$\tau = 0$ $\qquad \dfrac{\partial U}{\partial \tau} = 0$ $\qquad U(\xi) = U_o(\xi)$ $\qquad (4.7)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\underline{I}\,\frac{\partial^2 U_o}{\partial \xi^2}\right)\right] = \frac{48}{K'}\,\underline{\delta}$$

## MOUVEMENT DU VÉHICULE (ims)

$$\frac{d^2 \underline{Y}_{ims}}{d\tau^2} + \eta_{ims}\,\underline{\varepsilon}_{ims}\,\frac{d\,\underline{Y}_{ims}}{d\tau} + \eta_{ims}\,\underline{CR}_{ims} = \sum_{im=1}^{m_{ims}}\left(\underline{\varepsilon}_{ims}\,\frac{dy_{im}}{d\tau} + \underline{CR}_{ims}\,y_{im}\right) \qquad (4.8)$$

$$\frac{d^2 \underline{\theta}_{ims}}{d\tau^2} + \left(\sum_{im=1}^{m_{ims}} \frac{1}{\underline{J}_{im}}\right)\underline{\varepsilon}_{ims}\,\frac{d\,\underline{\theta}_{ims}}{d\tau} + \underline{CR}_{ims}\left(\sum_{im=1}^{m_{ims}} \frac{1}{\underline{J}_{im}}\right)\underline{\theta}_{ims} = \sum_{im=1}^{m_{ims}}\left(\frac{\underline{CR}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}}\,y_{im} + \frac{\underline{\varepsilon}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}}\,\frac{dy_{im}}{d\tau}\right) \qquad (4.9)$$

## PARAMÈTRES ET FONCTIONS SANS DIMENSION

$$\underline{Y}_{ims} = \frac{Y_{ims}}{\frac{Mg\ell^3}{48EI_o}}$$

$$\underline{CR}_{ims} = \frac{CR_{ims}}{MS_{ims}\,\frac{EI_o}{\delta_o \ell^4}} \qquad \underline{\varepsilon}_{ims} = \frac{\varepsilon_{ims}}{MS_{ims}\sqrt{\frac{EI_o}{\delta_o \ell^4}}}$$

$$\underline{\theta}_{ims} = \frac{\theta_{ims}\,.\,D_{ims}}{\frac{Mg\ell^3}{48EI_o}}$$

$$\underline{J}_{im} = \frac{J_{im}}{MS_{ims}\,(d_{im})^2}$$

$$\underline{d}_{im} = \frac{d_{im}}{}$$

| CONDITION DE PASSAGE PAR L'ESSIEU(im) du véhicule ims | PARAMÈTRES ET FONCTIONS SANS DIMENSION |
|---|---|
| $\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\underline{I}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}\right)\right]_{\substack{\xi=\sqrt{K}[\tau-(\tau_0)_{im}] \\ \tau>(\tau_0)_{im}}} = \frac{48}{K'}\left(\underline{m}_{im}+\frac{\underline{MS}_{ims}}{n_{ims}}\right)$<br>$\underline{m}_{im}\frac{d^2\underline{y}_{im}}{d\tau^2} + \underline{CR}_{ims}\,\underline{MS}_{ims}\left(\underline{Y}_{ims}-\underline{d}_{im}\underline{\theta}_{ims}-\underline{y}_{im}\right)$<br>$\underline{C}_{ims}\,\underline{MS}_{ims}\left(\frac{d\underline{Y}_{ims}}{d\tau}-\underline{d}_{im}\frac{d\underline{\theta}_{ims}}{d\tau}-\frac{d\underline{y}_{im}}{d\tau}\right)$ | $\sqrt{K} = \ell v\sqrt{\frac{\delta_0}{EI_0}}$<br>$\underline{m}_{im} = \frac{m_{im}}{\delta_0\ell}$ (4.10)<br>$\underline{MS}_{ims} = \frac{MS_{ims}}{\delta_0\ell}$ |

$n_{ims}$ nombre d'essieux du véhicule(ims)

$D_{ims}$ distance entre essieux extrêmes

$$\frac{F_i(t)}{\frac{EI_o f}{\ell^3}} = -\frac{m_i}{\delta_o \ell}\,\frac{d^2\underline{y}_i}{d\tau^2} + \frac{CR}{\frac{EI_o}{\ell^3}}\left[\underline{Y} - \frac{d_i}{d}\left(\frac{\theta D}{f}\right) - \underline{y}_i\right]$$

$$+ \frac{\varepsilon\ell}{\sqrt{EI_o \delta_o}}\left[\frac{d\underline{Y}}{d\tau} - \frac{d_i}{d}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\theta D}{f}\right) - \frac{d\underline{y}_i}{d\tau}\right] + \frac{m_i g + \frac{\underline{MSg}}{m}}{\frac{EI_o f}{\ell^3}} \qquad (4.5)$$

L'ensemble des équations (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5) définit le mouvement du pont et celui des véhicules ; les tableaux mettent en évidence les paramètres et fonctions sans dimension.

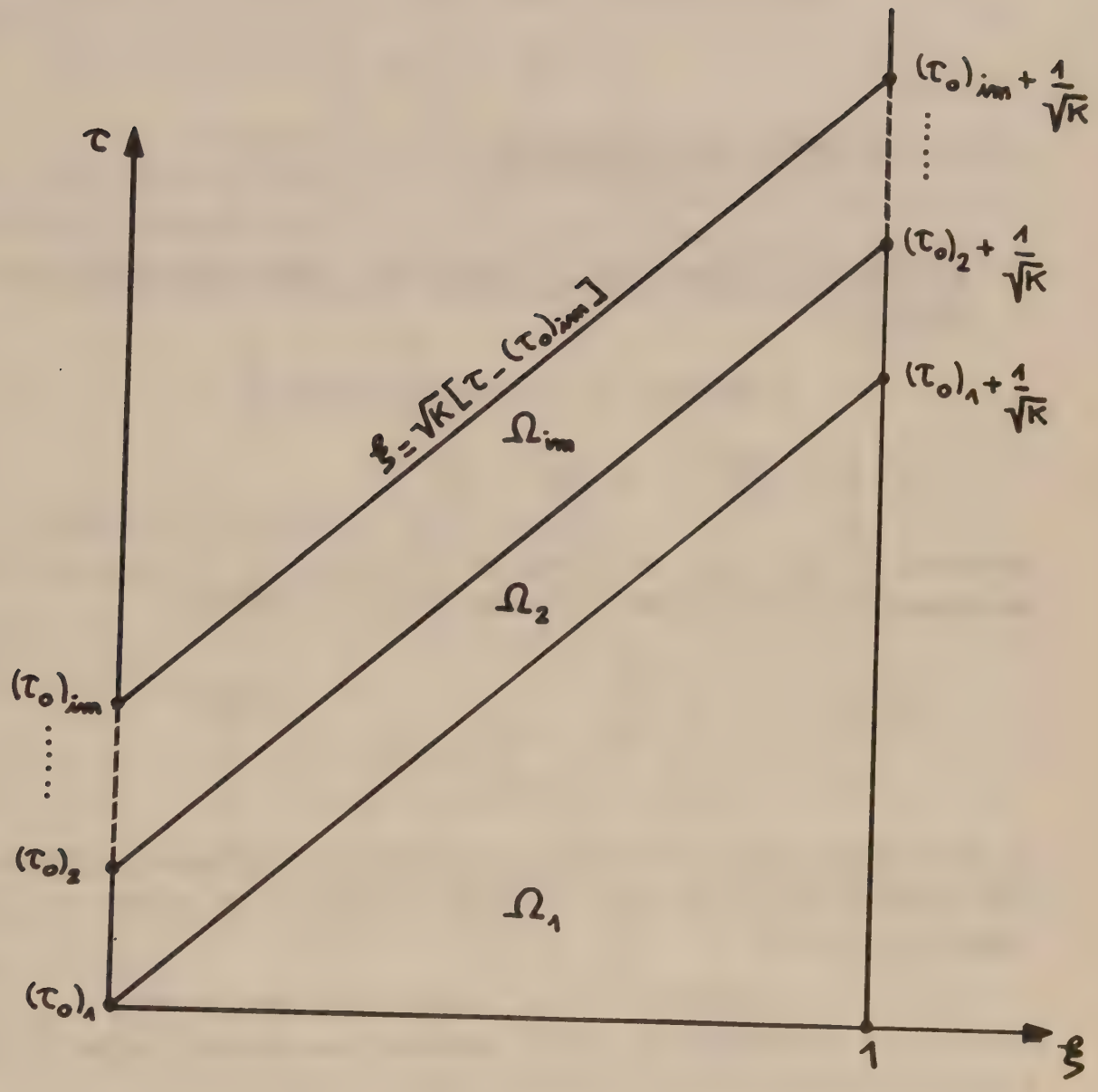

τ
$(\tau_o)_{im} + \frac{1}{\sqrt{K}}$
$(\tau_o)_2 + \frac{1}{\sqrt{K}}$
$(\tau_o)_1 + \frac{1}{\sqrt{K}}$
$\xi = \sqrt{K}[\tau - (\tau_o)_{im}]$
$\Omega_{im}$
$\Omega_2$
$\Omega_1$
$(\tau_o)_{im}$
$(\tau_o)_2$
$(\tau_o)_1$
1
ξ

fig.6

## III - METHODE DE RESOLUTION

### 1 - HYPOTHESES DE REGULARITE ET ETUDE DES DISCONTINUITES DE LA SOLUTION

La solution U de l'équation (4.6) II

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\underline{\dot{I}}\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right] + \underline{\delta}\ \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{48}{K'}\ \underline{\delta}$$

vérifiant les conditions aux limites et initiales (4.7) II présente au droit de chaque essieu (im) une discontinuité définie par (4.10) II

$$\Delta\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\underline{\dot{I}}\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)\right]_{\substack{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right] \\ \tau > (\tau_o)_{im}}} = \underline{F}_{im}(\tau)$$

le second membre étant la fonction sans dimension représentant la force appliquée au droit de l'essieu (im), l'instant d'entrée de cet essieu sur le pont étant $(\tau_o)_{im}$ .

La solution $U(\xi, \tau)$ est définie dans la bande $o < \xi < 1$ du plan $(\xi, \tau)$ partagée en un certain nombre de sous-domaines selon le nombre d'essieux par des droites parallèles de pente $\sqrt{K}$ (fig. 6).

#### 1.1 - HYPOTHESES DE REGULARITE

Dans chaque sous-domaine $\Omega_{im}$ on suppose que la fonction $U(\xi, \tau)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}_{im}$ des fonctions six fois continûment dérivables à l'intérieur du sous-domaine et dont les dérivées sixième ont des limites finies le long des frontières

$$\mathcal{E}_{i_m} = C^6\left[\overset{o}{\Omega}_{im}\right]$$

Les dérivées de $U$ étant continues jusqu'à l'ordre deux dans $\Omega = \cup \Omega_{im}$ on a

$$U(\xi,\tau) \in \mathcal{E} = \left\{ \underset{im}{U} \quad \mathcal{E}_{im} \right\} \cap \left\{ C^2(\Omega) \right\} \qquad (1.1.1)$$

On supposera d'autre part que la fonction $\underline{\dot{I}}(\xi)$ est trois fois continûment dérivable dans $\Omega$ et que la fonction $\underline{\delta}(\xi)$ est une fois continûment dérivable dans $\Omega$, ces hypothèses étant toujours réalisées quand l'inertie et la masse par unité de longueur sont constantes.

$$\underline{\dot{I}} \in C^3(\Omega)$$
$$\underline{\delta} \in C^1(\Omega) \qquad (1.1.2)$$

## 1.2 - ETUDE DES DISCONTINUITES DE LA SOLUTION

Moyennant les hypothèses du paragraphe précédent on peut développer les équations (4.6)II et (4.10)II.
Dans chaque sous-domaine $\Omega_{im}$ :

$$\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} = \frac{1}{\underline{\dot{I}}} \left[ -2 \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \underline{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{48\,\underline{\delta}}{K'} \right] \qquad (1.2.1)$$

on peut dériver les deux membres par rapport à $\xi$ en réutilisant la formule (1.2.1) pour remplacer la dérivée quatrième $\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4}$ qui apparait au second membre il vient

$$\frac{\partial^5 U}{\partial \xi^5} = \frac{1}{\underline{\dot{I}}} \left\{ \left[ \frac{6}{\underline{\dot{I}}} \left( \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}}{\partial \xi^2} \right] \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \underline{\delta} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi \partial \tau^2} \right.$$
$$+ \left[ \frac{3}{\underline{\dot{I}}} \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \underline{\dot{I}}}{\partial \xi^3} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \left[ \frac{3\,\underline{\delta}}{\underline{\dot{I}}} \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} - \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial \xi} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$$
$$\left. + \left[ - \frac{3\,\underline{\delta}}{\underline{\dot{I}}} \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial \xi} \right] \frac{48}{K'} \right\} \qquad (1.2.2)$$

Examinons maintenant l'expression développée de (4.10)II

$$\Delta \left[ \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \underline{\dot{I}} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[(\tau - \tau_o)_{im}\right]} = \underline{F}_{im}(\tau)$$

or, étant données les hypothèses (1.1.1) et (1.1.2)

$$\Delta \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \Delta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0$$

par conséquent

$$\Delta \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]} = \frac{1}{\underline{\dot{I}}} \underline{F}_{im}(\tau) \qquad (1.2.3)$$

on obtient immédiatement, d'après (1.2.1) :

$$\Delta \left[ \frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]} = - \frac{2}{\underline{\dot{I}}} \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \Delta \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{Im}\right]} \qquad (1.2.4)$$

pour les dérivées cinquième (1.2.2) entraine :

$$\Delta \left[ \frac{\partial^5 U}{\partial \xi^5} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]} = \frac{1}{\underline{\dot{I}}} \left\{ \left[ \frac{6}{\underline{\dot{I}}} \left( \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial \xi^2} \right] \Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right.$$

$$\left. - \Delta \left[ \underline{\delta} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi \partial \tau^2} \right] \right\}_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]}$$

le terme $\Delta \underline{\delta} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi \partial \tau^2}$ est lié à $\Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$

le long de la droite $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$

$$\Delta \left[ \underline{\delta} \; \frac{\partial^3 U}{\partial \xi \partial \tau^2} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]} = \underline{\delta}\, K \; \Delta \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]} \qquad (1.2.5)$$

d'où l'expression de la discontinuité de la dérivée cinquième

$$\Delta \; \frac{\partial^5 U}{\partial \xi^5} = \frac{1}{\underline{\dot{I}}} \left[ \frac{6}{\underline{\dot{I}}} \left( \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \right)^2 - 3 \; \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}\, K \right] \Delta \; \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \qquad (1.2.6)$$

## 1.3 - REGULARITE DE LA FONCTION $\underline{F}_{im}(\tau)$

Les propriétés de régularité de cette fonction dépendent des hypothèses du § III 1.1. D'après (1.2.3)

$$\underline{F}_{im}(\tau) = \underline{\dot{I}} \; \Delta \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]}$$

On va montrer que les hypothèses faites entrainent que la fonction $\underline{F}_{im}(\tau)$ est au moins deux fois continûment dérivable et pour cela que les quantités $\frac{d^2}{d\tau^2} \; \underline{F}_{im}(\tau)$ sont bien définies.

Observons tout d'abord que les opérateurs $\partial$ et $\Delta$ commutent. Soit en effet une fonction $\Phi(x, t)$ discontinue en un point d'une frontière

$$\Delta \Phi = \Phi(x^+, t) - \Phi(x^-, t)$$

la différentiation

$$d \; \Delta \Phi = \Phi(x^+ + dx, t + dt) - \Phi(x^+, t) - \Phi(x^- + dx, t + dt) + \Phi(x^-, t)$$

permet de faire apparaître des dérivées partielles

$$d \Delta\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^+, t + dt)\, dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^-, t + dt)\, dx + \Phi(x^+, t + dt) - \Phi(x^+, t)$$

$$- \Phi(x^-, t + dt) + \Phi(x^-, t)$$

$$= \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^+, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^-, t) \right] dx + \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x^+, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x^-, t) \right] dt$$

de cette dernière relation découlent les résultats annoncés

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x} = \Delta \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} = \Delta \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Evaluons alors les quantités $\frac{\partial}{\partial \tau} \underline{F}_{im}(\tau)$ et $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \underline{F}_{im}(\tau)$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F_{im}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]}$$

$$= \Delta \left[ \frac{\partial^4 U}{\partial \tau \partial \xi^3} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]}$$

de même

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \underline{F}_{im}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right] = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \Delta \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right] = \Delta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$$

Les hypothèses (1.1) permettent d'affirmer que le long de la droite $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$ les quantités $\Delta \frac{\partial^4 U}{\partial \tau \partial \xi^3}$ et $\Delta \frac{\partial^5 U}{\partial \tau^2 \partial \xi^3}$ sont des fonctions définies et continues de $\tau$ ; il en résulte que $\underline{F}_{im}(\tau)$ est une fonction de $\tau$ deux fois continûment dérivable.

## 2 - METHODE DES DIFFERENCES FINIES

### 2.1 - MAILLAGE ET DISCRETISATION

Dans chaque sous-domaine $\Omega_{im}$ l'équation aux dérivées partielles donnant U est

$$\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\underline{\dot{I}}} \frac{\partial \underline{\dot{I}}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\underline{\dot{I}}} \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\underline{\delta}}{\underline{\dot{I}}} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{48\ \underline{\delta}}{\underline{\dot{I}}\ K'} \qquad (2.1.1)$$

avec sur la frontière du domaine

$$\Delta \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right]_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]} = \frac{1}{\underline{\dot{I}}} \underline{F}_{im}(\tau) \qquad (2.1.2)$$

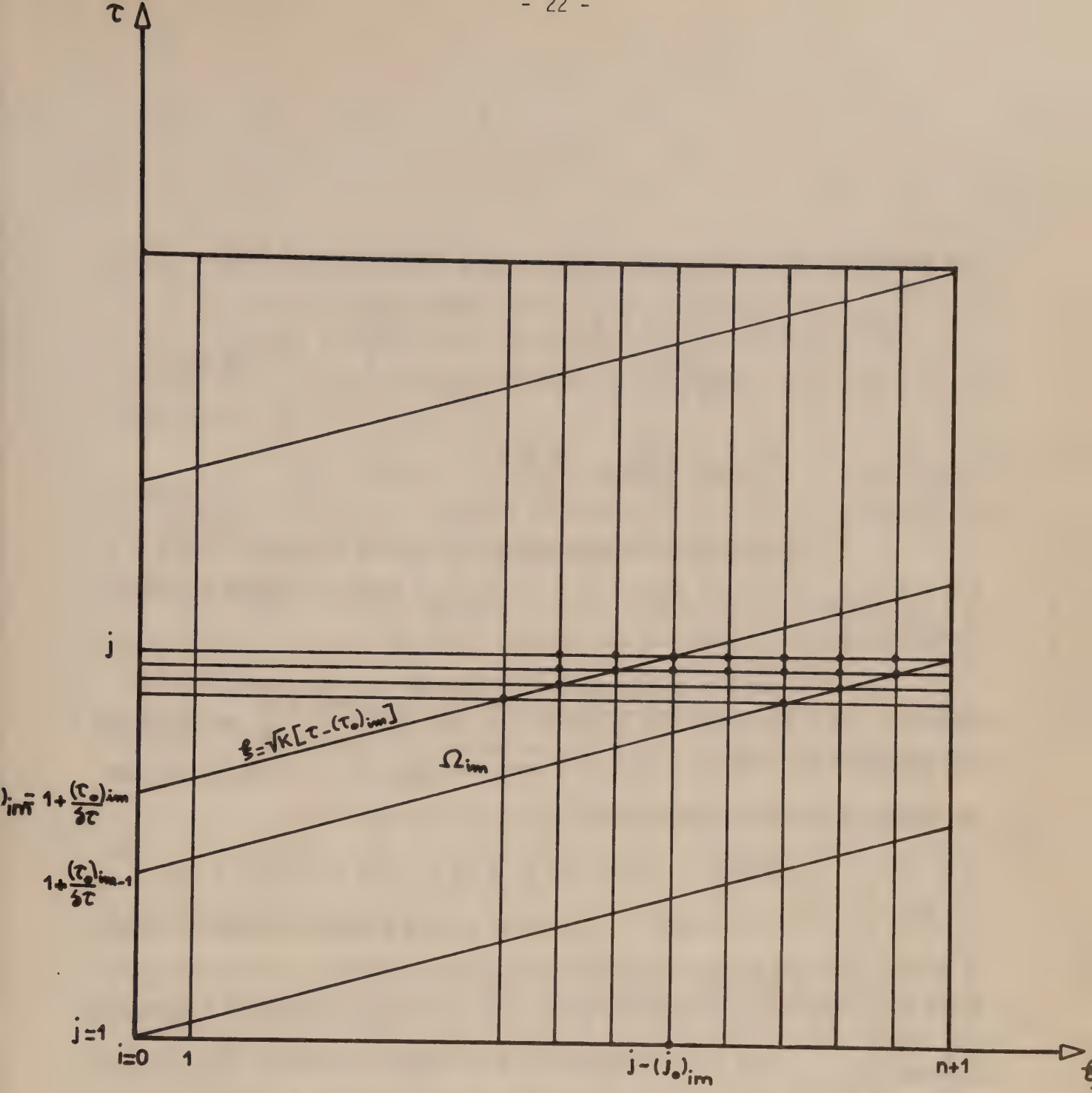

τ
j
$\xi=\sqrt{K}[\tau-(\tau_o)_{im}]$
$\Omega_{im}$
$1+\frac{(\tau_o)_{im}}{\delta\tau}$
$1+\frac{(\tau_o)_{im-1}}{\delta\tau}$
j=1
i=0
1
$j-(j_o)_{im}$
n+1

Fig. 7

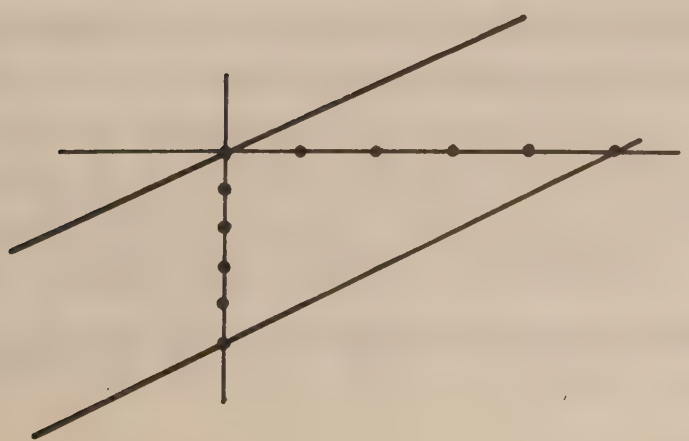


fig 8

les conditions aux limites et initiales sont définies en (4.7)II

$$\begin{aligned} &\text{pour} \quad \xi = 0 \quad \text{et} \quad \xi = 1 && U = 0 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\ &\text{pour} \quad \tau = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 && U(\xi) = U_o(\xi) \end{aligned} \qquad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \underline{\dot{I}} \, \frac{\partial^2 U_o}{\partial \xi^2} \right) = \frac{48 \, \underline{\delta}}{K'}$$

Le domaine de définition de $U$ est le rectangle $0 < \xi < 1$, $0 < \tau < (\tau_o)_{nm} + \frac{1}{\sqrt{K}}$ du plan $(\xi, \tau)$, $(\tau_o)_{nm}$ étant l'instant d'entrée du dernier essieu (indice nm) sur le pont (fig. 7).

L'axe des abscisses est partagé en $(n + 1)$ intervalles de longueur $\delta \xi$. Sur l'axe des ordonnées le pas est $\delta \tau = \frac{\delta \xi}{\sqrt{K}}$ de sorte que les droites $\xi = \sqrt{K} \left[ \tau - (\tau_o)_{im} \right]$ sont partagées en $n$ intervalles par des noeuds du maillage ainsi défini.

L'indice $i$ varie de $0$ à $(n + 1)$ et l'indice $j$ de $1$ à $\frac{(\tau_o)_{nm}}{\delta \tau} + n + 2$. A une époque $j$ donnée le nombre minimal d'intervalles de de subdivision entre deux frontières successives est de 5 ; ainsi qu'on le verra ceci provient du procédé utilisé dans la discrétisation de l'expression $\Delta \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right]$. Il en résulte cependant une distance minimale $\frac{5 \ell}{n+1}$ entre essieux ou appuis voisins pour un nombre total de points $n$ donné.
D'autre part, étant donné le choix du maillage, le nombre minimal d'intervalles de subdivision est également 5 sur une droite verticale (i) (fig. 8)

La méthode de résolution consiste à remplacer les dérivées par des différences dans les équations (2.1.1) et (2.1.2) en utilisant les conditions (2.1.3). La discrétisation sur les dérivées par rapport à $\xi$ se fait le long d'une droite (j) ; pour les points (i, j) du maillage situés à l'intérieur d'un domaine $\Omega_{im}$ on écrit l'équation (2.1.1) discrétisée tandis que pour les points situés sur la frontière de deux domaines on écrit (2.1.2) discrétisée. La discrétisation sur les dérivées $\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ par rapport à $\tau$ se fait

en utilisant les valeurs de $U(\xi, \tau)$ aux points $(i, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j-2)$, $(i, j-3)$. Pour le second membre de (2.1.2) la propriété de régularité du § III 1.3 permet de développer la fonction $\underline{F}_{im}(\tau)$ en série de Taylor le long de $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$ en fonction des valeurs de $\underline{F}_{im}(\tau)$ aux époques $j$, $(j-1)$, $(j-2)$, $(j-3)$.

Désignons par $[U^*]_j$ le vecteur colonne à $n$ composantes représentant la solution du problème discrétisé à l'époque $j$. La méthode énoncée permet de construire l'algorithme matriciel suivant pour $j > 4$ :

$$\underset{(n,n)\ (n,1)}{\{A\}\ [U^*]_j} = \underset{(n,n)\ (n,1)}{\{B\}\ [U^*]_{j-1}} + \underset{(n,n)\ (n,1)}{\{C\}\ [U^*]_{j-2}} + \underset{(n,n)(n,1)}{\{D\}\ [U^*]_{j-3}} + \underset{(n,1)}{[E]}$$

A partir des données initiales on détermine ainsi les valeurs de $[U^*]_j$ aux époques ultérieures en employant des méthodes particulières pour $j \leqslant 4$.

Le schéma ainsi construit est implicite mais il est stable quel que soit le rapport $\frac{\delta\xi}{\delta\tau}$ alors que les schémas explicites ne le sont pas [11].

## 2.2 - DISCRETISATION SUR $\xi$

Il s'agit d'exprimer les diverses dérivées par rapport à $\xi$ intervenant dans les équations (2.1.1) et (2.1.2), soient $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$, $\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4}$ et $\Delta\left[\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}\right]$. On utilise pour cela les hypothèses du § III 1.1 qui permettent de développer $U$ en série de Taylor jusqu'à l'ordre six à l'intérieur des sous-domaines $\Omega_{im}$ et les résultats du § III 1.2.

La discrétisation est faite le long d'une horizontale $(j)$ éventuellement partagée en un certain nombre de segments par les frontières $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$ séparant les sous-domaines. Les points d'intersection de la ligne $j$ et des frontières ont pour indices $i = j-(j_o)_{im}$ et $j$. $U_{i,j}$ désigne la valeur de $U(\xi, \tau)$ au noeud $(i, j)$ et de façon générale $f_{i,j}$ désigne la valeur d'une fonction $f$ au noeud $(i, j)$.

En un noeud $(i, j)$ intérieur ou sur la frontière d'un sous-domaine on peut écrire un certain nombre de relations du type

$$U_{i+k,j} = U_{i,j} + k\,\delta\xi \frac{\partial U_{i,j}}{\partial \xi} + \frac{(k\delta\xi)^2}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} + \frac{(k\delta\xi)^3}{3!} \frac{\partial^3 U^{\pm}_{i,j}}{\partial \xi^3} + \ldots + \frac{(k\delta\xi)^6}{6!}$$

$$\frac{\partial^6 U^{\pm}}{\partial \xi^6}\left(\xi_i + k\,\theta\,\delta\xi,\ \tau_j\right) \qquad (2.2.1)$$

par application de la formule de Taylor. Le signe + ou - affecté en exposant aux dérivées d'ordre supérieur à deux est le même que celui de k ; naturellement il n'y a pas lieu de distinguer entre les dérivées + et - en un noeud intérieur au sous-domaine où l'on a

$$\frac{\partial^m U^{+}_{i,j}}{\partial \xi^m} = \frac{\partial^m U^{-}_{i,j}}{\partial \xi^m} \qquad (m = 3, \ldots, 6)$$

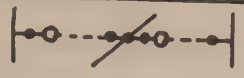
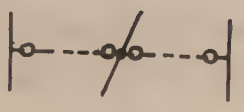
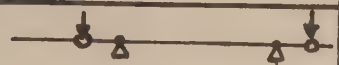
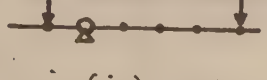
On remarquera également que les noeuds (i + k, j) et (i, j) appartiennent au même sous-domaine, l'un des deux (ou les deux) pouvant éventuellement se trouver sur la frontière.

Les diverses relations (2.2.1), jointes aux résultats du § III 1.2, permettent d'obtenir les dérivées :

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2}\ ,\ \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3}\ ,\ \frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial \xi^4}$$

ainsi que la discontinuité $\Delta \dfrac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3}$ en fonction des valeurs $U_{i+k,j}$ par des formules linéaires, l'ordre de l'approximation étant supérieur ou égal à deux (les termes négligés sont en $O(\delta\xi^2)$ au moins ).
Ces formules sont différentes suivant la position du noeud (i , j) par rapport aux frontières $\xi = 0$ , $\xi = 1$ ou $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$ . Elles sont présentées sous forme de tableaux synoptiques, le détail des calculs figurant en Annexes

| | |
|---|---|
| Annexe 1 | $\dfrac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2}$ |
| Annexe 2 | $\dfrac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3}$ |
| Annexe 3 | $\Delta \dfrac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3}$ |
| Annexe 4 | $\dfrac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial \xi^4}$ |

| | | |
|---|---|---|
| |  $i \neq [1; j-(j_o)_{im}\mp 1; n]$ | $(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{12}\left[U_{i-2,j} - 16U_{i-1,j} + 30U_{i,j} - 16U_{i+1,j} + U_{i+2,j}\right] + O(\delta\xi^7)$ (2.2.1.1) |
| $i \neq j-(j_o)_{im}$ $i \neq i_a$ |  $i = [1; j-(j_o)_{im}\mp 1; n]$ | $(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{1-\frac{2}{24}\frac{(\delta\xi)^2}{\bar{I}_i}\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2}} \left\{ U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j} + \frac{2}{24}\frac{(\delta\xi)^3}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\left[\frac{\partial^2 U_{i+1,j}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U_{i-1,j}}{\partial \xi^2}\right] - \frac{2}{24}\frac{(\delta\xi)^4}{\bar{I}_i}\left[\frac{48\,\delta_i}{K'} - \delta_i \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2}\right] + O(\delta\xi^6)\right\}$ (2.2.1.2) |
| | $3 \leq i \leq n-2$ | $(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{9}\left\{ U_{i-3,j} - \frac{27}{4}U_{i-2,j} + 27U_{i-1,j} - \frac{85}{2}U_{i,j} + 27U_{i+1,j} - \frac{27}{4}U_{i+2,j} + U_{i+3,j} - \frac{54(\delta\xi)^2}{120\bar{I}_i}\left[\frac{6}{\bar{I}_i}\left(\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \delta_i K\right](\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} + O(\delta\xi^6)\right\}$ (2.2.1.3) |
| $i = j-(j_o)_{im}$ $i \neq i_a$ | $2 \leq i \leq n-1$ | $(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{12}\left\{ -U_{i-2,j} + 16U_{i-1,j} - 30U_{i,j} + 16U_{i+1,j} - U_{i+2,j} + \left[-\frac{8}{6} + \frac{16}{120\bar{I}_i}(\delta\xi)^2\left(\frac{6}{\bar{I}_i}\left(\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \delta_i K\right)\right](\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} + O(\delta\xi^6)\right\}$ (2.2.1.4) |
| | $i = [1; n]$ | $(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} = -\frac{12}{120}(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i\mp 1,j}}{\partial \xi^2} + \frac{145}{120}U_{i\mp 1,j} - \frac{304}{120}U_{i,j} + \frac{174}{120}U_{i\pm 1,j} - \frac{16}{120}U_{i\pm 2,j} + \frac{1}{120}U_{i\pm 3,j} + \frac{1}{120}\left[-\frac{73}{6} - \frac{\delta\xi_x}{24}\frac{2}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} + \frac{2(\delta\xi)^2}{\bar{I}_i}\left(\frac{6}{\bar{I}_i}\left(\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \delta_i K\right)\right](\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} + O(\delta\xi^6)$ (2.2.1.5) |
| |  $i = i_a \pm 1$ | $(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} = \frac{35}{12}U_{i,j} - \frac{104}{12}U_{i\pm 1,j} + \frac{114}{12}U_{i\pm 2,j} - \frac{56}{12}U_{i\pm 3,j} + \frac{11}{12}U_{i\pm 4,j} + O(\delta\xi^5)$ (2.2.1.6) |
| $= i_a$ |  $i = j-(j_o)_{im} \pm 1$ | $(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} = \frac{35}{12}U_{i,j} - \frac{104}{12}U_{i\pm 1,j} + \frac{114}{12}U_{i\pm 2,j} - \frac{56}{12}U_{i\pm 3,j} + \frac{11}{12}U_{i\pm 4,j} + O(\delta\xi^5)$ (2.2.1.7) |
| | $i \neq j-(j_o)_{im} \pm 1$ | (2.2.1.3, 4, 5) |

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2}$$

## 2.2.1 - DERIVEES SECONDE $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$

La formule générale (2.2.1.1) fait intervenir les noeuds $(i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2)\ j$ pour le calcul de la dérivée seconde $\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2}$

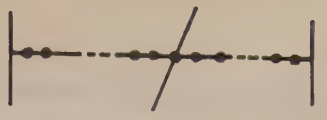
Si le noeud (i, j) est situé à proximité immédiate des frontières $\xi = 0$ , $\xi = 1$ ou $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$ la formule générale n'est plus applicable. On utilise alors (2.2.1.2) en remplaçant trois fois de suite dans le second membre les dérivées seconde par les expressions qui conviennent. Au bout de trois itérations les termes dans lesquelles apparaissent des dérivées seconde sont d'ordre six et seront donc négligés.

Pour le cas $i = j - (j_o)_{im}$ (noeud sur une frontière $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$ ) on emploie les formules (2.2.1.3), (2.2.1.4) ou (2.2.1.5) suivant la position du noeud (i, j) par rapport aux frontières $\xi = 0$, $\xi = 1$ .

Un cas particulier se présente à proximité ou sur un appui intermédiaire $i_a$ où la dérivée troisième est discontinue, comme au droit du point d'application d'une charge. Si $i = j - (j_o)_{im} = i_a \pm 1$, (2.2.1.6) permet d'obtenir $(\delta \xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2}$ par une formule ne faisant intervenir que les points situés d'un seul côté de la charge dans un même sous-domaine. L'expression (2.2.1.7) est l'analogue de (2.2.1.6) pour $i = i_a = j - (j_o)_{im} \pm 1$. Remarquons que l'espacement minimal des charges (5 intervalles) ne permet pas de faire intervenir plus de 4 points d'un même côté de l'appui.

Enfin au droit d'un appui non situé à proximité immédiate d'une charge $(i \neq j - (j_o)_{im} \pm 1)$ on emploie les formules (2.2.1.3), (2.2.1.4) et (2.2.1.5) en remplaçant les discontinuités $\Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3}$ par les expressions du § III 2.2.3 alors qu'au droit d'une charge la valeur de ces discontinuités est connue et égale à $\frac{1}{\dot{I}} \underline{F}_{im}(\tau)$.

$i \neq [1;2;j-(j_o)_{im}-2;\ldots;j-(j_o)_{im}+2;(n-1);n]$



$$(\delta\xi)^3 \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = -\frac{1}{8}\left[-U_{i-3,j}+8U_{i-2,j}-13U_{i-1,j}+13U_{i+1,j}-8U_{i+2,j}+U_{i+3,j}\right] + O(\delta\xi^7) \qquad (2.2.2.1)$$

$i \neq [1;\ j-(j_o)_{im}-1;\ j-(j_o)_{im};\ j-(j_o)_{im}+1;\ n]$

$$(\delta\xi)^3 \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{2+\frac{(\delta\xi)^2}{2\bar{I}_i}\left[\frac{6}{\bar{I}_i}\left(\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \bar{\delta}_i K\right]} \left\{-U_{i-2,j}+2U_{i-1,j}-2U_{i+1,j}+U_{i+2,j}\right.$$
$$\frac{(\delta\xi)^3}{2\bar{I}_i}\left[\frac{3}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \bar{I}_i}{\partial \xi^3}\right](\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} - \frac{(\delta\xi)^3}{2\bar{I}_i}\left[-\frac{3\bar{\delta}_i}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\delta}_i}{\partial \xi}\right](\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2}$$
$$\left. - \frac{(\delta\xi)^5}{2\bar{I}_i}\left[-\frac{3\bar{\delta}_i}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\delta}_i}{\partial \xi}\right]\frac{48}{K'} + O(\delta\xi^7)\right\} \qquad (2.2.2.2)$$

$i = [1;\ j-(j_o)_{im}-1;\ j-(j_o)_{im}+1;\ n]$

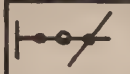
$i = j-(j_o)_{im}-1$

$i = 1$

(2.2.2.8)

(2.2.2.3)

$i = 2$



$$(\delta\xi)^3 \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{\frac{11}{23} - \frac{9(\delta\xi)^2}{92\bar{I}_i}\left[\frac{6}{\bar{I}_i}\left(\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \bar{\delta}_i K\right]} \left\{\frac{6}{23}(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i-2,j}}{\partial \xi^2} - U_{i-2,j} + \frac{63}{23}U_{i-1,j}\right.$$
$$-\frac{57}{23}U_{i,j} + \frac{17}{23}U_{i+1,j} + \frac{9(\delta\xi)^3}{92\bar{I}_i}\left[\frac{3}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \bar{I}_i}{\partial \xi^3}\right](\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2}$$
$$\left. + \frac{9(\delta\xi)^3}{92\bar{I}_i}\left[\frac{3\bar{\delta}_i}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\delta}_i}{\partial \xi}\right](\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} + \frac{9(\delta\xi)^5}{92\bar{I}_i}\left[-\frac{3\bar{\delta}_i}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\delta}_i}{\partial \xi}\right]\frac{48}{K'} + O(\delta\xi^6)\right\} \qquad (2.2.2.4)$$

$i \neq [1;2;n-1;n]$

$$(\delta\xi)^3 \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{2-\frac{(\delta\xi)^2}{2\bar{I}_i}\left[\frac{6}{\bar{I}_i}\left(\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \bar{\delta}_i K\right]} \left\{\pm U_{i\pm 3,j} - 6U_{i\pm 2,j} + 12U_{i\pm 1,j} - 10U_{i,j} + 3U_{i\pm 1,j}\right.$$
$$+\frac{(\delta\xi)^3}{2\bar{I}_i}\left[\frac{3}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \bar{I}_i}{\partial \xi^3}\right](\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} + \frac{(\delta\xi)^3}{2\bar{I}_i}\left[\frac{3\bar{\delta}_i}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\delta}_i}{\partial \xi}\right](\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2}$$
$$\left. + \frac{(\delta\xi)^5}{2\bar{I}_i}\left[-\frac{3\bar{\delta}_i}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\delta}_i}{\partial \xi}\right]\frac{48}{K'} + O(\delta\xi^6)\right\} \qquad (2.2.2.5)$$

$i = (n-1)$

symétrique de (2.2.2.4) (2.2.2.6)

$i = j-(j_o)_{im}+1$

$i = n$

symétrique de (2.2.2.8) (2.2.2.7)

$i = [1;n]$

$$(\delta\xi)^3 \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{\pm 1}{1 \pm \frac{10}{12}\frac{\delta\xi}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} + \frac{(\delta\xi)^2}{6\bar{I}_i}\left[\frac{6}{\bar{I}_i}\left(\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \bar{\delta}_i K\right]} \left\{-(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i\mp 1,j}}{\partial \xi^2} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\right.$$
$$-\left[\frac{5}{12}\frac{(\delta\xi)^2}{\bar{I}_i}\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} \pm \frac{1}{6}\frac{(\delta\xi)^3}{\bar{I}_i}\left(\frac{3}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \bar{I}_i}{\partial \xi^3}\right)\right](\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} - \left[\frac{5}{12}\frac{\bar{\delta}_i(\delta\xi)^2}{\bar{I}_i} \pm \frac{1}{6}\frac{(\delta\xi)^3}{\bar{I}_i}\left(\frac{3\bar{\delta}_i}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\delta}_i}{\partial \xi}\right)\right](\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2}$$
$$\left. -\left[\frac{5}{12}(\delta\xi)^4 \frac{48\bar{\delta}_i}{\bar{I}_i K'} \pm \frac{1}{6}\frac{(\delta\xi)^5}{\bar{I}_i}\left(-\frac{3\bar{\delta}_i}{\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\delta}_i}{\partial \xi}\right)\frac{48}{K'}\right] + O(\delta\xi^6)\right\} \qquad (2.2.2.8)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$$

Les conditions aux limites se traduisent par la nullité des déplacements $U_{i+k,j}$ et des dérivées seconde $\frac{\partial^2 U_{i+k,j}}{\partial \xi^2}$ pour tous les noeuds (i+k, j) situées sur les frontières $\xi = 0$ ou $\xi = 1$ ($i+k = [0 ; n+1]$ ).

## 2.2.2 - DERIVEES TROISIEME $\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$

Les formules de discrétisation pour $(\delta\xi)^3 \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3}$ sont d'ordre six au moins ; pour cela on est amené d'une part à utiliser les résultats du § III 2.2.1 donnant $(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2}$ et d'autre part ceux du § III 2.3 donnant les dérivées seconde $\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2}$ .

Selon le nombre de points disponibles de part et d'autre du noeud (i, j) on emploiera l'une des formules (2.2.2.1) à (2.2.2.8) . Lorsque deux indices correspondent à des positions symétriques - $i = 1$ et $i = n$, $i = 2$ et $i = n - 1$ ou encore $i = j - (j_o)_{im} - 1$ et $i = j - (j_o)_{im} + 1$ - les formules correspondantes se déduisent les unes des autres en changeant $\delta\xi$ en $-\delta\xi$ et $i+k$ en $i-k$ ; c'est le cas par exemple de (2.2.2.3) et (2.2.2.7).

## 2.2.3 - DISCONTINUITE $\Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$

Ce paragraphe répond à deux buts différents :

- au droit d'une charge $\underline{F}_{im}(\tau)$ il faut discrétiser l'équation (2.1.2)

$$\Delta \left[\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}\right]_{\xi = \sqrt{K}\,[\tau - (\tau_o)_{im}]} = \frac{1}{\underline{I}}\,\underline{F}_{im}(\tau)$$

**$5 \le i \le n-4$** (2.2.3.1)

$$(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{7}{4} U_{i-5,j} - \frac{41}{4} U_{i-4,j} + \frac{98}{4} U_{i-3,j} - \frac{118}{4} U_{i-2,j} + \frac{71}{4} U_{i-1,j} - \frac{34}{4} U_{i,j} + \frac{71}{4} U_{i+1,j} - \frac{118}{4} U_{i+2,j} + \frac{98}{4} U_{i+3,j} - \frac{41}{4} U_{i+4,j} + \frac{7}{4} U_{i+5,j} + O(\delta\xi^6)$$

$$(\delta\xi)^3 \frac{\partial^3 U^{\pm}_{i,j}}{\partial \xi^3} = -\frac{17}{4} U_{i,j} \pm \frac{71}{4} U_{i\pm1,j} \mp \frac{118}{4} U_{i\pm2,j} \pm \frac{98}{4} U_{i\pm3,j} \mp \frac{41}{4} U_{i\pm4,j} \pm \frac{7}{4} U_{i\pm5,j} + O(\delta\xi^6)$$

**$i = [4; n-3]$** (2.2.3.2)

$$(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{1 + \frac{21(\delta\xi)^2}{12 \underline{I}_i}\left[\frac{6}{\underline{I}_i}\left(\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_i K\right]} \left[ -\frac{3}{2} U_{i\mp4,j} + 7 U_{i\mp3,j} - 12 U_{i\mp2,j} + 9 U_{i\mp1,j} - \frac{5}{2} U_{i,j} \pm \frac{21(\delta\xi)^3}{12 \underline{I}_i}\left(\frac{3}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \underline{I}_i}{\partial \xi^3}\right)(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} \pm \frac{21(\delta\xi)^3}{12 \underline{I}_i}\left(\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \underline{\delta}_i}{\partial \xi}\right)(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} \pm \frac{21(\delta\xi)^5}{12 \underline{I}_i}\left(-\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \underline{\delta}_i}{\partial \xi}\right)\frac{48}{K'}\right] - \frac{17}{4} U_{i,j} + \frac{71}{4} U_{i\pm1,j} - \frac{118}{4} U_{i\pm2,j} + \frac{98}{4} U_{i\pm3,j} - \frac{41}{4} U_{i\pm4,j} + \frac{7}{4} U_{i\pm5,j} + O(\delta\xi^6)$$

**$i = [3; n-2]$** (2.2.3.3)

$$(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{1 \pm \frac{2\times36(\delta\xi)}{24 \underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} + \frac{15(\delta\xi)^2}{12 \underline{I}_i}\left[\frac{6}{\underline{I}_i}\left(\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_i K\right]} \left[ U_{i\mp3,j} - 3U_{i\mp2,j} + 3U_{i\mp1,j} - U_{i,j} + \left(\frac{36(\delta\xi)^2}{24 \underline{I}_i}\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} \pm \frac{15(\delta\xi)^3}{12 \underline{I}_i}\left(\frac{3}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \underline{I}_i}{\partial \xi^3}\right)\right)(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} + \left(\frac{36(\delta\xi)^2 \underline{\delta}_i}{24 \underline{I}_i} \pm \frac{15(\delta\xi)^3}{12 \underline{I}_i}\left(\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \underline{\delta}_i}{\partial \xi}\right)\right)(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} - \frac{36\underline{\delta}_i(\delta\xi)^4}{24 \underline{I}_i}\frac{48}{K'} \pm \frac{15}{12 \underline{I}_i}\frac{(\delta\xi)^5}{\underline{I}_i}\left(-\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \underline{\delta}_i}{\partial \xi}\right)\frac{48}{K'}\right] + \frac{17}{4} U_{i,j} + \frac{71}{4} U_{i\pm1,j} - \frac{118}{4} U_{i\pm2,j} + \frac{98}{4} U_{i\pm3,j} - \frac{41}{4} U_{i\pm4,j} + \frac{7}{4} U_{i\pm5,j} + O(\delta\xi^6)$$

**$i = [2; n-1]$** (2.2.3.4)

$$(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{1 \pm \frac{2\times34(\delta\xi)}{24 \underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} + \frac{13(\delta\xi)^2}{12 \underline{I}_i}\left[\frac{6}{\underline{I}_i}\left(\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_i K\right]} \left[ -U_{i\mp2,j} + 4U_{i\mp1,j} - U_{i,j} + \left(\frac{34(\delta\xi)^2}{24 \underline{I}_i}\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} \pm \frac{13(\delta\xi)^3}{12 \underline{I}_i}\left(\frac{3}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \underline{I}_i}{\partial \xi^3}\right)\right)(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} + \left(\frac{34(\delta\xi)^2 \underline{\delta}_i}{24 \underline{I}_i} \pm \frac{13(\delta\xi)^3}{12 \underline{I}_i}\left(\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \underline{\delta}_i}{\partial \xi}\right)\right)(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} - \frac{34\underline{\delta}_i(\delta\xi)^4}{24 \underline{I}_i}\frac{48}{K'} + \frac{13(\delta\xi)^5}{12 \underline{I}_i}\left(-\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \underline{\delta}_i}{\partial \xi}\right)\frac{48}{K'}\right] - \frac{17}{4} U_{i,j} + \frac{71}{4} U_{i\pm1,j} - \frac{118}{4} U_{i\pm2,j} + \frac{98}{4} U_{i\pm3,j} - \frac{41}{4} U_{i\pm4,j} + \frac{7}{4} U_{i\pm5,j} + O(\delta\xi^6)$$

**$i = [1; n]$** (2.2.3.5)

$$(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{\frac{5}{6} + \frac{2\times11(\delta\xi)}{24 \underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} + \frac{19(\delta\xi)^2}{120 \underline{I}_i}\left[\frac{6}{\underline{I}_i}\left(\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_i K\right]} \left[ U_{i-1,j} + 2U_{i,j} - U_{i+1,j} \pm \left[1 \pm \frac{2\times10(\delta\xi)}{24 \underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} + \frac{(\delta\xi)^2}{6 \underline{I}_i}\left(\frac{6}{\underline{I}_i}\left(\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_i K\right)\right](\delta\xi)^3 \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} + \left(\frac{10(\delta\xi)^2}{24 \underline{I}_i}\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} \pm \frac{(\delta\xi)^3}{6 \underline{I}_i}\left(\frac{3}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \underline{I}_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \underline{I}_i}{\partial \xi^3}\right)\right)(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} + \left(\frac{10(\delta\xi)^2 \underline{\delta}_i}{24 \underline{I}_i} \pm \frac{(\delta\xi)^3}{6 \underline{I}_i}\left(\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \underline{\delta}_i}{\partial \xi}\right)\right)(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} - \frac{10\underline{\delta}_i(\delta\xi)^4}{24 \underline{I}_i}\frac{48}{K'} \pm \frac{(\delta\xi)^5}{6 \underline{I}_i}\left(-\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{I}_i}\frac{\partial \underline{I}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \underline{\delta}_i}{\partial \xi}\right)\frac{48}{K'}\right] + O(\delta\xi^6)$$

$$\Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$$

$i = i_a \neq [j-(j_o)_{im}-2;\ j-(j_o)_{im}-1;\ j-(j_o)_{im}+1;\ j-(j_o)_{im}+2]$ $i = j-(j_o)_{im} \neq [i_a-2;\ i_a-1;\ i_a+1;\ i_a+2]$

$$(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{1 - \frac{11\,(\delta\xi)^2}{20\,\bar{I}_i}\left[\frac{6}{\bar{I}_i}\left(\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \delta_i K\right]} \left[-U_{i-3,j} + 6U_{i-2,j} - 15U_{i-1,j} + 20U_{i,j} - 15U_{i+1,j} + 6U_{i+2,j} - U_{i+3,j} + O(\delta\xi^6)\right]$$

**(2.2.3.6)**

$i = i_a = [j-(j_o)_{im}-2;\ j-(j_o)_{im}+2]$ $\qquad$ $i = j-(j_o)_{im} = [i_a-2;\ i_a+2]$

$$(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{\frac{3}{6} \pm \frac{2\times 11(\delta\xi)}{24\,\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}} \left[U_{i\mp 2,j} - 5U_{i\mp 1,j} + 10U_{i,j} - 10U_{i\pm 1,j} + 5U_{i\pm 2,j} - U_{i\pm 3,j} + O(\delta\xi^5)\right]$$

**(2.2.3.7)**

$i = i_a = [j-(j_o)_{im}-1;\ j-(j_o)_{im}+1]$ $\qquad$ $i = j-(j_o)_{im} = [i_a-1;\ i_a+1]$

$$(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{\frac{27}{6\times 12} + \frac{2\times 99(\delta\xi)}{12\times 24\times \bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi} + \frac{195(\delta\xi)^2}{120\times 12\times \bar{I}_i}\left[\frac{6}{\bar{I}_i}\left(\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \xi^2} - \delta_i K\right]} \left[(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i\mp 1,j}}{\partial \xi^2} - \frac{45}{12}U_{i\mp 1,j} + \frac{154}{12}U_{i\mp 2,j} - \frac{214}{12}U_{i\pm 1,j} + \frac{156}{12}U_{i\pm 2,j} - \frac{61}{12}U_{i\pm 3,j} + \frac{10}{12}U_{i\pm 4,j} + O(\delta\xi^6)\right]$$

**(2.2.3.8)**

$$(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{\frac{1}{6} \pm \frac{2\,\delta\xi}{24\,\bar{I}_i}\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \xi}} \left[U_{i\mp 1,j} - 5U_{i,j} + 10U_{i\pm 1,j} - 10U_{i\pm 2,j} + 5U_{i\pm 3,j} - U_{i\pm 4,j} + O(\delta\xi^5)\right]$$

**(2.2.3.8)bis**

c'est-à-dire en particulier le premier membre, le second étant donné par (4.10) II

- au droit d'un appui intermédiaire la discontinuité $\Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$ est inconnue ; cependant elle peut intervenir dans certaines formules (§ III 2.2.1 par exemple). Dans ce cas on doit la remplacer par une expression discrétisée alors que dans le cas précédent elle est égale à $\frac{1}{\underline{I}} \underline{F}_{im}(\tau)$.

La discrétisation se fait de deux manières différentes selon qu'il s'agit d'une travée isostatique d'inertie constante ou bien d'un pont hyperstatique continu ou isostatique mais d'inertie variable.

Dans le cas d'une travée isostatique d'inertie constante on exprime $\frac{\partial^3 U^+}{\partial \xi^3}_{i,j}$ et $\frac{\partial^3 U^-}{\partial \xi^3}_{i,j}$ en fonction des valeurs de $U$ de part et d'autre du point $(i, j)$ ; on en déduit ensuite $\Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}_{i,j}$ par différence. Pour aboutir à une approximation d'ordre six sur $(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}_{i,j}$ on utilise les relations supplémentaires du § III 1.2 lorsque l'on ne dispose pas d'un nombre suffisant de points d'un côté de la frontière $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$. Les formules correspondantes sont regroupées sous les numéros (2.2.3.1) à (2.2.3.5).

Si le pont est hyperstatique ou isostatique mais d'inertie variable on procède directement par élimination entre les formules de Taylor en tenant compte des relations du § III 1.2 et des conditions de passage

$$\Delta \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 = \Delta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$$

auxquelles il convient d'ajouter $U = 0$ au droit d'un appui intermédiaire. L'ordre de l'approximation est au moins cinq sur $(\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}_{i,j}$ (formules 2.2.3.6 à 2.2.3.8 bis)*

* : *dans les cas envisagés (pont hyperstatique ou isostatique mais d'inertie variable) l'emploi des formules (2.2.3.1) à (2.2.3.5) - lorsqu'elle est possible - conduit à des résultats moins précis.*

$i \neq [1;n]$

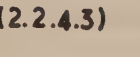
(2.2.4.1)

$$(\delta\xi)^4 \frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial \xi^4} = U_{i-2,j} - 4U_{i-1,j} + 6U_{i,j} - 4U_{i+1,j} + U_{i+2,j} + \left[-\frac{1}{6} - \frac{2\delta\xi}{24\,\underline{\dot{I}}_{i-1}} \frac{\partial \underline{\dot{I}}_{i-1}}{\partial \xi} - \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\underline{\dot{I}}_{i-1}} \left( \frac{6}{\underline{\dot{I}}_{i-1}} \left( \frac{\partial \underline{\dot{I}}_{i-1}}{\partial \xi} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}_{i-1}}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_{i-1} K \right) \right] (\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i-1,j}}{\partial \xi^3} + \left[ -\frac{1}{6} + \frac{2\delta\xi}{24\,\underline{\dot{I}}_{i+1}} \frac{\partial \underline{\dot{I}}_{i+1}}{\partial \xi} - \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\underline{\dot{I}}_{i+1}} \left( \frac{6}{\underline{\dot{I}}_{i+1}} \left( \frac{\partial \underline{\dot{I}}_{i+1}}{\partial \xi} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}_{i+1}}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_{i+1} K \right) \right] (\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i+1,j}}{\partial \xi^3} + O(\delta\xi$$

$i = [1;n]$

(2.2.4.2)

$i = j - (j_0)_{im} \pm 1$



$$(\delta\xi)^4 \frac{\partial^4 U^{n}_{i,j}}{\partial \xi^4} = \frac{24}{20} \left\{ 5U_{i,j} - 4\,U_{i\mp1,j} + U_{i\mp2,j} - \frac{2(\delta\xi)^4}{24\,\underline{\dot{I}}_{i\mp1}} \left[ -2 \frac{\partial \underline{\dot{I}}_{i\mp1}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 U^{\pm}_{i\mp1,j}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}_{i\mp1,j}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U_{i\mp1,j}}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_{i\mp1} \frac{\partial^2 U_{i\mp1,j}}{\partial \tau^2} + 48 \frac{\underline{\delta}_{i\mp1}}{K'} \right] + \left[ -\frac{1}{6} \mp \frac{2\delta\xi}{24\,\underline{\dot{I}}_{i\mp1}} \frac{\partial \underline{\dot{I}}_{i\mp1}}{\partial \xi} - \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\underline{\dot{I}}_{i\mp1}} \left( \frac{6}{\underline{\dot{I}}_{i\mp1}} \left( \frac{\partial \underline{\dot{I}}_{i\mp1}}{\partial \xi} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}_{i\mp1}}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_{i\mp1} K \right) \right] (\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i\mp1,j}}{\partial \xi^3} + O(\delta\xi^6) \right\}$$

(2.2.4.3)

$i \neq j - (j_0)_{im} \pm 1$

$$(\delta\xi)^4 \frac{\partial^4 U^{n}_{i,j}}{\partial \xi^4} = \frac{24}{20} \left\{ \frac{128}{24} U_{i,j} - \frac{108}{24} U_{i\mp1,j} + \frac{32}{24} U_{i\mp2,j} - \frac{2}{24} U_{i\mp3,j} - \frac{2}{24} \left[ -\frac{1}{6} - \frac{2\delta\xi}{24\,\underline{\dot{I}}_{i\mp2}} \frac{\partial \underline{\dot{I}}_{i\mp2}}{\partial \xi} - \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\underline{\dot{I}}_{i\mp2}} \left( \frac{6}{\underline{\dot{I}}_{i\mp2}} \left( \frac{\partial \underline{\dot{I}}_{i\mp2}}{\partial \xi} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \underline{\dot{I}}_{i\mp2}}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_{i\mp2} K \right) \right] (\delta\xi)^3 \Delta \frac{\partial^3 U_{i\mp2,j}}{\partial \xi^3} + O(\delta\xi^6$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4}$$

Remarquons enfin que pour deux points symétriques il faut changer $i + k$ en $i - k$ mais conserver $(\delta\xi)^3 \ \Delta \frac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3}$ car $(\delta\xi)$ devient $(-\delta\xi)$ et $\Delta$ devient $-\Delta$.

## 2.2.4 - DERIVEES QUATRIEME $\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4}$

En un noeud $(i, j)$ on établit une formule générale (2.2.4.1) faisant intervenir les valeurs de $U$ aux points $(i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2)\ j$ ainsi que les discontinuités éventuelles $\Delta \frac{\partial^3 U_{i-1,j}}{\partial \xi^3}$ et $\Delta \frac{\partial^3 U_{i+1,j}}{\partial \xi^3}$. Dans le cas où il ne se trouve ni charge, ni appui au droit de l'un des noeuds $(i - 1, i + 1)\ j$ la discontinuité correspondante y est nulle. Sinon elle est donnée par $\frac{1}{\underline{I}} \ \underline{F}_{im}(\tau)$ s'il s'agit d'une charge ou par l'expression convenable du § III 2.2.3 s'il s'agit d'un appui intermédiaire.

La formule générale n'est plus applicable aux noeuds $i = [\,1\ ;\ n\,]$ voisins des frontières $\xi = 0$, $\xi = 1$. On utilise alors les formules (2.2.4.2) si le noeud est immédiatement voisin d'une charge $(i = j - (j_o)_{im} \mp 1)$ et (2.2.4.3) dans les autres cas.

Dans (2.2.4.2) il est nécessaire de connaitre $\frac{\partial^3 U^+_{n-1,j}}{\partial \xi^3}$ et $\frac{\partial^3 U^-_{2,j}}{\partial \xi^3}$ ; on écrira

$$\frac{\partial^3 U^+_{n-1,j}}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 U^-_{n-1,j}}{\partial \xi^3} + \Delta \frac{\partial^3 U_{n-1,j}}{\partial \xi^3}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial^3 U^-_{2,j}}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 U^+_{2,j}}{\partial \xi^3} - \Delta \frac{\partial^3 U_{2,j}}{\partial \xi^3}$$

de cette façon on se ramène du côté de la discontinuité où le nombre de points est suffisant. Les dérivées troisième sont alors obtenues par la deuxième expression (2.2.3.1) et les discontinuités sont remplacées par $\frac{1}{\underline{I}} \ \underline{F}_{im}(\tau)$.

$j \geq 4$


$$(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} = 2U_{i,j} - 5U_{i,j-1} + 4U_{i,j-2} - U_{i,j-3} + O(\delta\tau^4)$$

(2.3.1.1)

$j = 3$

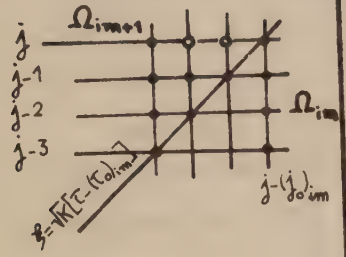
$$(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} = \frac{5}{2} U_{i,j} - 8U_{i,j-1} + \frac{11}{2} U_{i,j-2} + O(\delta\tau^4)$$

(2.3.1.2)

$j = 2$

$$(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} = 2(U_{i,j} - U_{i,j-1}) + O(\delta\tau^3)$$

(2.3.1.3)




$i = j - (j_o)_{im} - 1$

$j \neq 3$ (2.3.1.4)

$$(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-1,j}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{3}(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-3,j}}{\partial \tau^2} + \frac{2}{3}(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im},j}}{\partial \tau^2} + O(\delta\tau^4)$$

$j = 3$ (2.3.1.4)bis

$$(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-1,j}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2}(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im},j}}{\partial \tau^2} + O(\delta\tau^4)$$

$i = j - (j_o)_{im} - 2$

$$(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-2,j}}{\partial \tau^2} = \left[\frac{2}{3} \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-3,j}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im},j}}{\partial \tau^2}\right](\delta\tau)^2 + O(\delta\tau^4)$$

(2.3.1.5)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$$

## 2.3 - DISCRETISATION SUR $\tau$

On étudie d'abord les dérivées $\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ qui interviennent dans (2.1.1), puis les dérivées $\frac{dU}{d\tau}$ et $\frac{d^2U}{d\tau^2}$ qui interviennent dans l'expression de $\underline{F}_{im}(\tau)$ (2.1.2).

La discrétisation se fait cette fois le long des verticales (i) pour $\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ ou bien le long des droites $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$. A une époque (j) donnée on utilise les valeurs de U aux époques précédentes, le but étant d'obtenir des approximations d'ordre deux. Le détail des calculs figure à l'annexe 5.

### 2.3.1 - DERIVEES PARTIELLES $\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$

La formule générale (2.3.1.1) de discrétisation de $\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2}$ met en jeu les noeuds i(j, j - 1, j - 2, j - 3) ; elle n'est donc pas applicable si certains de ces noeuds n'existent pas (j < 4) ou ne se trouvent pas dans le même sous-domaine que le noeud (i, j).

Aux instants initiaux ( j < 4) les formules tiennent compte des conditions initiales (2.1.3)

$$U(\xi, 0) = U_o(\xi)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(\xi, 0) = 0$$

on obtient ainsi (2.3.1.2) et (2.3.1.3), l'approximation étant seulement d'ordre un pour $\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2}$ dans (2.3.1.3).

Pour les noeuds (i, j) du sous-domaine $\Omega_{im+1}$ situés au voisinage de la droite $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$ — $i = j - (j_o)_{im} - 1$ et $i = j - (j_o)_{im} - 2$ — les noeuds (i, j - 3), et même (i, j - 2) pour $i = j - (j_o)_{im} - 1$, se trouvent dans le sous-domaine $\Omega_{im}$. On opère alors par interpolation sur les dérivées $\frac{\partial^2 U_{i+\frac{1}{2},\, j}}{\partial \tau^2}$ et $\frac{\partial^2 U_{i-\frac{1}{2},\, j}}{\partial \tau^2}$ pour les-

| | |
|---|---|
| $j \geq (j_o)_{im}+2$ | $\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(U_{j-2} - 4U_{j-1} + 3U_j\right) + O(\delta\tau^3)$ **(2.3.2.1)** |
| $j=(j_o)_{im}$ | $\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = -\frac{3}{2}U\left(0,(\tau_o)_{im}\right) + 2U\left(\delta\xi,(\tau_o)_{im}\right) - \frac{1}{2}U\left(2\delta\xi,(\tau_o)_{im}\right) + O(\delta\tau^3)$ **(2.3.2.2)** |
| $j=(j_o)_{im}+1$ | $\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = -\delta\tau \frac{dU_{j-1}}{d\tau} + 2U_j + O(\delta\tau^3)$ **(2.3.2.3)** |

# $\frac{dU}{d\tau}$

| | |
|---|---|
| $j \geq (j_o)_{im}+3$ | $(\delta\tau)^2 \frac{d^2U_j}{d\tau^2} = 2U_j - 5U_{j-1} + 4U_{j-2} - U_{j-3} + O(\delta\tau^4)$ **(2.3.3.1)** |
| $j=(j_o)_{im}$ | $(\delta\tau)^2 \frac{d^2U_j}{d\tau^2} = 8\,\frac{\left[-3U(\delta\xi,\tau)+4U(\delta\xi,\tau-\delta\tau)-U(\delta\xi,\tau-2\delta\tau)\right]_{\tau=(\tau_o)_{im}}}{-4}$ **(2.3.3.2)** $-\,2\,\frac{\left[-3U(2\delta\xi,\tau)+4U(2\delta\xi,\tau-\delta\tau)-U(2\delta\xi,\tau-2\delta\tau)\right]_{\tau=(\tau_o)_{im}}}{-4} + O(\delta\tau^3)$ |
| $j=(j_o)_{im}+1$ | $(\delta\tau)^2 \frac{dU_j}{d\tau} = 6(U_j - U_{j-1}) - 6\delta\tau \frac{dU_{j-1}}{d\tau} - 2(\delta\tau)^2 \frac{d^2U_{j-1}}{d\tau^2} + O(\delta\tau^4)$ **(2.3.3.3)** |
| $j=(j_o)_{im}+2$ | $(\delta\tau)^2 \frac{dU_j}{d\tau} = \frac{5}{2}U_j - 8U_{j-1} + \frac{11}{2}U_{j-2} + 3\delta\tau \frac{dU_{j-2}}{d\tau} + O(\delta\tau^4)$ **(2.3.3.4)** |

# $\frac{d^2U}{}$

quelles cet inconvénient ne se présente pas. Ceci conduit aux expressions (2.3.1.4), (2.3.1.4) bis et (2.3.1.5).

## 2.3.2 - DERIVEES $\frac{dU}{d\tau}$

Ce terme et le terme $\frac{d^2U}{d\tau^2}$ sont calculés par discrétisation le long de $\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$. On utilise donc la fonction $U(\sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right], \tau)$ de la seule variable $\tau$ ; soit $U_j$ la valeur de cette fonction à l'époque j .

La formule générale (2.3.2.1) permet une approximation du second ordre de $\frac{dU_j}{d\tau}$ à partir de $U_j$, $U_{j-1}$ et $U_{j-2}$.

Considérons l'instant $j = (j_o)_{im}$ où la charge (im) pénètre sur le pont. $U_j$ est nul, $U_{j-1}$ et $U_{j-2}$ ne sont pas définis.

La formule de discrétisation (2.3.2.2) se déduit des relations

$$\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = \delta\tau \frac{d}{d\tau} \left\{ U\left[\sqrt{K}\left(\tau - (\tau_o)_{im}\right), \tau\right] \right\}_{\tau = (\tau_o)_{im}}$$

$$= \delta\tau \left[\sqrt{K} \frac{\partial U_j}{\partial \xi} + \frac{\partial U_j}{\partial \tau}\right]_{\tau = (\tau_o)_{im}}$$

$$= \delta\tau \sqrt{K} \frac{\partial U(\xi, (\tau_o)_{im})}{\partial \xi}_{\xi = o}$$

la dérivée $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ étant discrétisée le long de l'axe $\xi > o$ .

Un deuxième cas particulier se présente pour $j = (j_o)_{im} + 1$ car $U_{j-2}$ n'est pas défini.

Une relation supplémentaire est cependant fournie par la connaissance de $\delta\tau \frac{dU_{j-1}}{d\tau}$ , d'après (2.3.2.2).

### 2.3.3 - DERIVEES $\frac{d^2U}{d\tau^2}$

La formule générale (2.3.3.1) est analogue à (2.3.1.1). Le calcul de $\frac{d^2U_j}{d\tau^2}$ met en jeu $U_j$, $U_{j-1}$, $U_{j-2}$ et $U_{j-3}$ dans cette formule. Il faut donc envisager à part les époques $j = (j_o)_{im}$, $(j_o)_{im} + 1$ et $(j_o)_{im} + 2$ pour lesquelles certaines de ces valeurs peuvent ne pas être définies.

Pour $j = (j_o)_{im}$ on peut montrer que l'on a :

$$\frac{d^2U_j}{d\tau^2} = 2\sqrt{K} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\tau}(\xi, \tau)\right|_{\substack{\xi = o \\ \tau = (\tau_o)_{im}}}$$

(2.3.3.2) résulte de la discrétisation de $\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\tau}$ qui ne met plus en jeu $U_{j-1}$, $U_{j-2}$ et $U_{j-3}$. L'approximation réalisée par (2.3.3.2) est d'ordre un sur $\frac{d^2U_j}{d\tau^2}$.

Si $j$ vaut $(j_o)_{im} + 1$ ou $(j_o)_{im} + 2$ on utilise les formules (2.3.2.2) et (2.3.3.2) et l'approximation réalisée est seulement d'ordre un sur $\frac{d^2U_j}{d\tau^2}$.

## 2.4 - PRISE EN COMPTE DES SUSPENSIONS

### 2.4.1 - ETUDE DU MOUVEMENT DES VEHICULES ET CALCUL DES FORCES $\underline{F}_{im}(\tau)$ EXERCEES PAR LES ESSIEUX

Rappelons tout d'abord les équations du mouvement du véhicule (ims)

$$\frac{d^2\underline{Y}}{d\tau^2}_{ims} + n_{ims}\,\underline{\varepsilon}_{ims}\,\frac{d\underline{Y}}{d\tau}_{ims} + n_{ims}\,\underline{CR}_{ims}\,\underline{Y}_{ims} = \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left(\underline{\varepsilon}_{ims}\,\frac{d\underline{y}}{d\tau}_{im} + \underline{CR}_{ims}\underline{y}_{im}\right) \qquad (2.4.1)$$

$$\frac{d^2\underline{\theta}}{d\tau^2}_{ims} + \left( \sum_{im=1}^{n_{ims}} \frac{1}{\underline{J}_{im}} \right) \underline{\varepsilon}_{ims} \frac{d\underline{\theta}_{ims}}{d\tau} + \underline{CR}_{ims} \left( \sum_{im=1}^{n_{ims}} \frac{1}{\underline{J}_{im}} \right) \underline{\theta}_{ims} =$$

$$- \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \frac{\underline{CR}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}}\, \underline{y}_{im} + \frac{\underline{\varepsilon}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}} \frac{d\underline{y}_{im}}{d\tau} \right) \qquad (2.4.2)$$

et les conditions de passage par l'essieu (im) qui expriment le couplage existant entre le mouvement des véhicules et les véhicules du pont

$$\dot{\underline{I}}\ \Delta \left[ \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right]_{\substack{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right] \\ \tau > (\tau_o)_{im}}} = \underline{F}_{im}(\tau) = \frac{48}{K^4} \left( \underline{m}_{im} + \frac{\underline{MS}_{ims}}{\underline{n}_{ims}} \right)$$

$$- \underline{m}_{im} \frac{d^2\underline{y}_{im}}{d\tau^2} + \underline{CR}_{ims}\, \underline{MS}_{ims} \left( \underline{Y}_{ims} - \underline{d}_{im}\, \underline{\theta}_{ims} - \underline{y}_{im} \right)$$

$$+ \underline{\varepsilon}_{ims}\, \underline{MS}_{ims} \left( \frac{d\underline{y}_{ims}}{d\tau} - \underline{d}_{im} \frac{d\underline{\theta}_{ims}}{d\tau} - \frac{d\underline{y}_{im}}{d\tau} \right) \qquad (2.4.3)$$

Soient $\underline{r}_{1ims}$, $\underline{r}_{2ims}$, $\underline{r}_{3ims}$ et $\underline{r}_{4ims}$ les racines caractériqtiques des premiers membres des équations (2.4.1) et (2.4.2)

$$\left.\begin{matrix} \underline{r}_{1ims} \\ \underline{r}_{2ims} \end{matrix}\right\} = \frac{- n_{ims}\, \underline{\varepsilon}_{ims} \pm \sqrt{(n_{ims}\, \underline{\varepsilon}_{ims})^2 - 4 n_{ims}\, \underline{CR}_{ims}}}{2} \qquad (2.4.4)$$

$$\left.\begin{matrix} \underline{r}_{3ims} \\ \underline{r}_{4ims} \end{matrix}\right\} = \frac{- \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \frac{1}{\underline{J}_{im}} \right) \pm \sqrt{\left( \sum_{im=1}^{n_{ims}} \frac{1}{\underline{J}_{im}} \right)^2 - 4 \left( \sum_{im=1}^{n_{ims}} \frac{1}{\underline{J}_{im}} \right) \underline{CR}_{ims}}}{2}$$

les solutions des équations avec second membre et leurs dérivées sont alors

$$\underline{Y}_{ims}(\tau) = \underline{A}_{ims} \exp \underline{r}_{1ims}\,\tau + \underline{B}_{ims} \exp \underline{r}_{2ims}\,\tau$$

$$+ \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \underline{\varepsilon}_{ims} \frac{d\underline{y}_{im}}{d\eta} + \underline{CR}_{ims}\, \underline{y}_{im} \right) \frac{\exp \underline{r}_{1ims}(\tau-\eta) - \exp \underline{r}_{2ims}(\tau-\eta)}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}}\, d\eta \qquad (2.4.5)$$

$$\dot{\underline{Y}}_{ims}(\tau) = \underline{r}_{1ims}\, \underline{A}_{ims} \exp \underline{r}_{1ims}\,\tau + \underline{r}_{2ims}\, \underline{B}_{ims} \exp \underline{r}_{2ims}\,\tau$$

$$+ \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \underline{\varepsilon}_{ims} \frac{d\underline{y}_{im}}{d\eta} + \underline{CR}_{ims}\, \underline{y}_{im} \right) \frac{\underline{r}_{1ims} \exp \underline{r}_{1ims}(\tau-\eta) - \underline{r}_{2ims} \exp \underline{r}_{2ims}(\tau-\eta)}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}}\, d\eta \qquad (2.4.6)$$

$\underline{A}_{ims}$ et $\underline{B}_{ims}$ dépendent des conditions initiales à l'instant $(\tau_o)_1$ où le premier essieu du véhicule (ims) pénètre sur le pont.

$$\underline{A}_{ims} = \frac{\dot{\underline{Y}}_{ims}\left[(\tau_o)_1\right] - \underline{Y}_{ims}\left[(\tau_o)_1\right] \underline{r}_{2\,ims}}{\underline{r}_{1\,ims} - \underline{r}_{2\,ims}}$$

$$\underline{B}_{ims} = \frac{\dot{\underline{Y}}_{ims}\left[(\tau_o)_1\right] - \underline{Y}_{ims}\left[(\tau_o)_1\right] \underline{r}_{1\,ims}}{\underline{r}_{2\,ims} - \underline{r}_{1\,ims}}$$

Les expressions de $\underline{\theta}_{ims}$ et $\dot{\underline{\theta}}_{ims}$ sont données à l'annexe 6 ainsi que les formes particulières que prennent les solutions lorsque les racines sont doubles.

Pour chaque véhicule (ims) les solutions $\underline{Y}_{ims}$ , $\dot{\underline{Y}}_{ims}$, $\underline{\theta}_{ims}$ et $\dot{\underline{\theta}}_{ims}$ sont valables entre $(\tau_o)_1$ , instant d'entrée du premier essieu du véhicule et $(\tau_o)_{n_{ims}} + \frac{1}{\sqrt{K}}$ , instant où le dernier essieu du véhicule considéré sort de l'ouvrage (fig. 9).

Les fonctions $\underline{y}_{im}(\tau)$ et $\frac{d\underline{y}_{im}(\tau)}{d\tau}$ représentent la déformation de la poutre et sa dérivée au droit de l'essieu (im).

$$\underline{y}_{im}(\tau) = U\left[\sqrt{K}\,(\tau - (\tau_o)_{im}),\tau\right]$$

$$\frac{d\underline{y}_{im}(\tau)}{d\tau} = \frac{d\ U\left[\sqrt{K}\,(\tau-(\tau_o)_{im}),\tau\right]}{d\tau}$$

ceci entraine que $\underline{Y}_{ims}(\tau)$, $\dot{\underline{Y}}_{ims}(\tau)$, $\underline{\theta}_{ims}(\tau)$ et $\dot{\underline{\theta}}_{ims}(\tau)$ peuvent être considérés comme des fonctionnelles de $U(\xi,\tau)$ et de ses dérivées aux instants antérieures à $\tau$ du fait de la présence du terme intégral dans leurs expressions.
En conséquence le second membre de (2.4.3), c'est-à-dire la fonction $\underline{F}_{im}(\tau)$, devient également une fonctionnelle de $U(\xi,\tau)$ et de ses dérivées.

Dans chaque sous-domaine $\Omega_{im}$, et donc dans $\Omega = U\,\Omega_{im}$ la solution des équations (2.1.1) (2.1.2) satisfaisant aux conditions (2.1.3) se ramène donc à la détermination de la fonction $U(\xi,\tau)$ dont on peut ensuite déduire pour chaque véhicule (ims) les fonctions $\underline{Y}_{ims}(\tau)$ et $\underline{\theta}_{ims}(\tau)$ définissant le mouvement du véhicule.

La méthode des différences finies fournit à chaque instant $\tau = (j-1)\xi\tau$ une approximation de la solution $U(\xi,\tau)$ sous forme d'un vecteur - colonne $[U^*]_j$ dont les $n$ composantes sont des valeurs approchées de $U(\xi,\tau)$ en $n$ points de l'ouvrage distants de $\delta\xi = \frac{1}{n+1}$.

## 2.4.2 - METHODE DE CALCUL DES TERMES INTEGRAUX

Il s'agit de termes de la forme

$$\underline{Y}^1_{ims}(\tau) = \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} f(\eta)\,\frac{\exp \underline{r}_{1ims}(\tau-\eta) - \exp \underline{r}_{2ims}(\tau-\eta)}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}}\,d\eta$$

et $$\underline{Y}^2_{ims}(\tau) = \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} f(\eta)\,\frac{\underline{r}_{1ims}\exp \underline{r}_{1ims}(\tau-\eta) - \underline{r}_{2ims}\exp \underline{r}_{2ims}(\tau-\eta)}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}}\,d\eta$$

fig.9

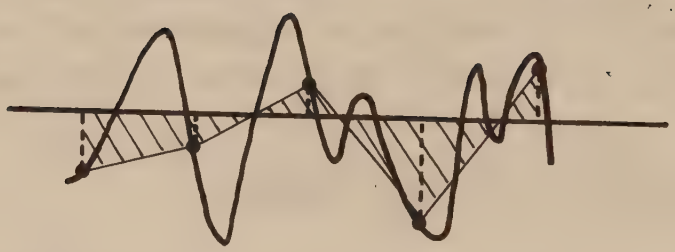


fig.10

$\underline{r}_{1\,ims}$ et $\underline{r}_{2\,ims}$ étant remplacées par $\underline{r}_{3\,ims}$ et $\underline{r}_{4\,ims}$ pour les expressions de $\underline{\theta}_{ims}$ et $\dot{\underline{\theta}}_{ims}$ .

Si les racines sont doubles ces termes intégraux prennent des formes différentes (voir Annexe 6).

Pour calculer ces intégrales la méthode classique des trapèzes s'est avérée inopérante. Ceci provient de ce que l'intégrand comporte des termes périodiques dont les oscillations peuvent être très rapprochées, dans le cas de ressorts très durs par exemple. Lorsque cette éventualité se présente les valeurs des intégrales calculées par la méthode des trapèzes risquent d'être totalement erronnées du fait du choix des points de calcul (fig. 10). Une solution consisterait à les multiplier mais elle conduirait en pratique à augmenter considérablement le temps-machine.

Exposons maintenant la méthode choisie, dite de la "fonctionnelle linéaire discrète" [12]

Remarquons tout d'abord que l'on peut, sans restreindre la généralité, remplacer $(\tau_o)_1$ par 0 (il suffit de considérer que $f(\eta)$ est nulle pour $0 \leqslant \eta \leqslant (\tau_o)_1$ ).

Raisonnons pour simplifier sur $\underline{Y}^1_{ims}(\tau)$

$$\underline{Y}^1_{ims}(\tau_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(\eta) \frac{\exp \underline{r}_{1\,ims}(\tau_j-\eta) - \exp \underline{r}_{2\,ims}(\tau_j-\eta)}{\underline{r}_{1\,ims} - \underline{r}_{2\,ims}} d\eta$$

après changement de variable

$$\underline{Y}^1_{ims}(\tau_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\tau_{j-k}}^{\tau_{j-k+1}} f(\tau_j-\eta) \frac{\exp \underline{r}_{1ims}\eta - \exp \underline{r}_{2ims}\eta}{\underline{r}_{1\,ims} - \underline{r}_{2\,ims}} d\eta$$

le principe du calcul consiste à poser

$$\int_{\tau_{j-k}}^{\tau_{j-k+1}} f(\tau_j-\eta) \frac{\exp \underline{r}_{1ims}\eta - \exp \underline{r}_{2ims}\eta}{\underline{r}_{1\,ims} - \underline{r}_{2\,ims}} d\eta = a_{j,k}\, f(\tau_j - \tau_{j-k})$$

$$+ \; b_{j,k}\, f(\tau_j - \tau_{j-k+1})$$

les coefficients $a_{j,k}$ et $b_{j,k}$ étant déterminés par la condition que cette égalité soit vérifiée pour une fonction $f$ constante et pour une fonction $f$ linéaire

— $f$ = constante

$$\int_{\tau_{j-k}}^{\tau_{j-k+1}} \frac{\exp \underline{r}_{1ims}\eta - \exp \underline{r}_{2ims}\eta}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} d\eta = a_{j,k} + b_{j,k}$$

— $f(\eta) = \alpha\eta + \beta$

$$\int_{\tau_{j-k}}^{\tau_{j-k+1}} \eta \frac{\exp \underline{r}_{1ims}\eta - \exp \underline{r}_{2ims}\eta}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} d\eta = a_{j,k} \left[\alpha (\tau_j - \tau_{j-k}) + \beta\right] + b_{j,k} \left[\alpha (\tau_j - \tau_{j-k+1}) + \beta\right]$$

en tenant compte de la première relation ceci s'écrit :

$$\int_{\tau_{j-k}}^{\tau_{j-k+1}} \eta \frac{\exp \underline{r}_{1ims}\eta - \exp \underline{r}_{2ims}\eta}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} d\eta = a_{j,k}\, \tau_{j-k} + b_{j-k}\, \tau_{j-k+1}$$

on se ramène par un changement de variable à l'intervalle $[0, \delta\tau]$ et les deux relations déterminant $a_{j,k}$ et $b_{j,k}$ sont

$$\int_{o}^{\delta\tau} \frac{\exp \underline{r}_{1ims}(\eta + \tau_{j-k}) - \exp \underline{r}_{2ims}(\eta + \tau_{j-k})}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} d\eta = a_{j,k} + b_{j,k} = \dot{I}_{j,k}$$

$$\int_{o}^{\delta\tau} \eta \frac{\exp \underline{r}_{1ims}(\eta + \tau_{j-k}) - \exp \underline{r}_{2ims}(\eta + \tau_{j-k})}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} d\eta = b_{j,k}\delta\tau = J_{j,k}$$

par suite

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= \dot{I}_{j,k} - \frac{J_{j,k}}{\delta\tau} \\ b_{j,k} &= \frac{J_{j,k}}{\delta\tau} \end{aligned} \qquad (2.4.7)$$

$$\underline{Y}^1_{ims}(\tau_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \left[ a_{j,k}\, f(\tau_j - \tau_{j-k}) + b_{j,k}\, f(\tau_j - \tau_{j-k+1}) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1} \left[ a_{j,k}\, f(k\delta\tau) + b_{j,k}\, f((k-1)\delta\tau) \right]$$

soit

$$\underline{Y}^1_{ims}(\tau_j) = \sum_{p=1}^{j} C_{j,p}\, f\left[ (j-p)\delta\tau \right]$$

avec

$$C_{j,1} = a_{j,j-1}$$

$$C_{j,p} = a_{j,j-p} + b_{j,j-p+1} \qquad 1 < p < j \qquad (2.4.8)$$

$$C_{j,j} = b_{j,1}$$

Le calcul des termes intégraux se réduit à la détermination des $C_{j,p}$ et donc, d'après (2.4.7) et (2.4.8), à celle des $\dot{I}_{j,k}$ et $J_{j,k}$ dont les expressions sont données à l'annexe 6

## 2.5 - CALCUL DES CONTRAINTES ET DU COEFFICIENT DE MAJORATION DYNAMIQUE

### 2.5.1 - DEFINITION DU COEFFICIENT DE MAJORATION DYNAMIQUE

Dans une section d'abscisse x, soient $\dot{I}(x)$ l'inertie de la section, $M(x)$ le moment fléchissant, $h^+(x)$ et $h^-(x)$ les distances du centre de gravité G de la section aux fibres extrêmes pour lesquelles les contraintes sont

$$\sigma^+(x) = \frac{M(x)\, h^+(x)}{\dot{I}(x)}$$

$$\sigma^-(x) = \frac{M(x)\, h^-(x)}{\dot{I}(x)} \qquad (2.5.1)$$

$$\text{or} \quad M(x) = - E\dot{I}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = - E\dot{I}(x) \frac{Mg\ell^3}{48\, EI_o} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \frac{1}{\ell^2}$$

$$= - \frac{Mg\ell}{48} \underline{\dot{I}}(\xi) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$$

d'après les définitions du § II 4

$$\text{posons} \qquad \underline{h}^{\pm}(\xi) = \frac{h^{\pm}(\frac{x}{\ell})}{h_o^{\pm}}$$

$h_o^{\pm}$ longueurs de référence prises dans la section sur appui de gauche.

Les relations (2.5.1) s'écrivent alors

$$\sigma^{\pm}(x) = - \frac{Mg\ell}{48} \frac{h_o^{\pm}}{\dot{I}_o} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \underline{h}^{\pm}(\xi)$$

$\sigma^+$ et $\sigma^-$ désignant les contraintes extrémales du coté positif et du coté négatif, quel que soit le signe de ces contraintes.

Le coefficient de majoration dynamique est défini par les quantités $k^+_m$ et $k^-_m$

$$k^+_m = \frac{\left[ - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} d \ \underline{h}^+(\xi) \right]_{\max}}{\left[ - \frac{\partial^2 U_s}{\partial \xi^2} \ \underline{h}^+(\xi) \right]_{\max}}$$

$$K^-_m = \frac{\left[ - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} d \ \underline{h}^-(\xi) \right]_{\min}}{\left[ - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} s \ \underline{h}^-(\xi) \right]_{\min}}$$

$U_d$ et $U_s$ désignant les flèches réduites dynamiques et statiques.

## 2.5.2 - CALCUL DE $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$

On montre facilement que l'on a

$$(\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} = U_{i-1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i+1,j}$$

$$-\left\{ \frac{1}{6} + \frac{\delta\xi}{24} \left( -\frac{2}{\dot{\underline{I}}_i} \frac{\partial \dot{\underline{I}}_i}{\partial \xi} \right) + \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\dot{\underline{I}}_i} \left[ \frac{6}{\dot{\underline{I}}_i} \left( \frac{\partial \dot{\underline{I}}_i}{\partial \xi} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \dot{\underline{I}}_i}{\partial \xi^2} - \underline{\delta}_i K \right] \right\}$$

$$+ 0\,(\delta\xi^6)$$

il suffit en effet d'additionner membre à membre les développements de Taylor

$$U_{i+1,j} = U_{i,j} + \delta\xi \frac{\partial U_{i,j}}{\partial \xi} + \frac{(\delta\xi)^2}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} + \frac{(\delta\xi)^3}{6} \frac{\partial^3 U^+_{i,j}}{\partial \xi^3}$$

$$+ \frac{(\delta\xi)^4}{24} \frac{\partial^4 U^+_{i,j}}{\partial \xi^3} + \frac{(\delta\xi)^5}{120} \frac{\partial^5 U^+_{i,j}}{\partial \xi^5} + 0\,(\delta\xi^6)$$

et $U_{i-1,j} = U_{i,j} - \delta\xi \frac{\partial U_{i,j}}{\partial \xi} + \frac{(\delta\xi)^2}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \xi^2} - \frac{(\delta\xi)^3}{6} \frac{\partial^3 U^-_{i,j}}{\partial \xi^3} + \ldots$

en tenant compte des relations du § III 1.2

# IV - ETUDE DE L'APPROXIMATION DE LA SOLUTION NUMERIQUE

## 1 - CONSISTANCE DE LA METHODE

Rappelons l'équation aux dérivées partielles du mouvement, valable dans chaque sous-domaine $\Omega_{im}$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\underline{\dot{I}}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right] = \frac{48\,\underline{\delta}}{K'} - \underline{\delta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \qquad (1.1)$$

à la traversée des frontières limitant deux sous-domaines

$$\Delta\ \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\underline{\dot{I}}\,\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)_{\xi = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]} = \underline{F}_{im}(\tau) \qquad (1.2)$$

les conditions aux limites et initiales sont :

$$\begin{aligned} &\text{pour} \quad \xi = 0 \quad \text{et} \quad \xi = 1 && U = 0 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\ &\text{pour} \quad \tau = 0 && \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \qquad U(\xi) = U_o(\xi) \end{aligned} \qquad (1.3)$$

si, à un instant $\tau$ donné on considère les seconds membres de (1.1) et (1.2) comme des données on écrira ces équations sous la forme

$$L_\tau\ [U] = f(\xi, \tau)$$

avec $$f(\xi, \tau) = \frac{48\,\underline{\delta}}{K'} - \underline{\delta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \quad \text{dans } \Omega_{im}$$

et $$f(\xi, \tau) = \underline{F}_{im}(\tau) \quad \text{à la fromtière de deux sous-domaines}$$

pour les conditions aux limites et initiales (1.3) on écrira de même

$$D_\tau\ [U] = g(\xi, \tau)$$

L'opérateur $L_\tau$ , associé aux conditions aux limites $D_\tau$ , est inversible et d'inverse G $(\xi,\tau)$

$$U(\xi,\tau) = L_\tau^{-1}\left[f(\xi,\tau)\right] = \int_0^1 G(\xi,\eta)\left[\frac{48\underline{\delta}}{K'} - \underline{\delta}\ \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}(\eta,\tau)\right] d\eta + G(\sigma,\sigma)\underline{F}_{im}(\tau) \quad (1.4)$$

$$\sigma = \sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$$

$G(\xi,\sigma)$ est l'opérateur de Green ; si l'inertie est constante et le pont isostatique on a par exemple

(1.4) bis

$$G(\xi,\sigma) = \frac{1}{6}\left[-(1-\sigma)\xi^2 + (2 - 3\sigma + \sigma^2)\sigma\right]\xi \qquad \xi \leqslant \sigma$$

$$G(\xi,\sigma) = \frac{1}{6}\left[-(1-\xi)\sigma^2 + (2 - 3\xi + \xi^2)\xi\right]\sigma \qquad \xi \geqslant \sigma$$

La méthode des différences finies consiste à remplacer $L_\tau$ et $D_\tau$ par des opérateurs discrétisés $L_\tau^\delta$ et $D_\tau^\delta$ construits en remplaçant les dérivées par des différences de manière à ce que, pour toute fonction U de l'espace $\mathcal{E}$ défini au § III 1.1

$$L_\tau^\delta\left[U\right] - L_\tau\left[U\right] = 0\left((\delta\xi)^2, (\delta\tau)^2\right)$$

$$D_\tau^\delta\left[U\right] - D_\tau\left[U\right] = 0\left((\delta\xi)^2, (\delta\tau)^2\right)$$

$0\left((\delta\xi)^2 , (\delta\tau)^2\right)$ désigne une fonction de $\xi$ et $\tau$ pour laquelle, dans tout voisinage d'un point $(\xi,\tau)$, il existe une constante $M_{\xi,\tau}$ positive telle que

$$\left| 0\left((\delta\xi)^2 , (\delta\tau)^2\right)\right| \leqslant M_{\xi,\tau}\,\delta\xi^2 = M_{\xi,\tau}\,K\,\delta\tau^2$$

C'est en ce sens que la méthode est dite consistante : si $\delta\xi = \sqrt{K}\,\delta\tau$ tend vers zéro, autrement dit si le membre de points du maillage tend vers l'infini, $L_\tau^\delta\left[U\right]$ tend vers $L_\tau\left[U\right]$ et $D_\tau^\delta\left[U\right]$ tend vers $D_\tau\left[U\right]$.

La solution du problème discrétisé ( $L_\tau^\delta$ , $D_\tau^\delta$ ), qui se ramène a celle d'un système linéaire d'ordre n à chaque instant , vérifie

$$L_\tau^\delta\left[\tilde{U}^*\right] = \tilde{f}^\delta(\xi,\tau)$$

$$D_\tau^\delta\left[\tilde{U}^*\right] = \tilde{g}^\delta(\xi,\tau) \qquad (1.5)$$

$\sim$ indique que l'on se restreint aux points du maillage ; $[\tilde{U}^*]_j$ est un vecteur-colonne dont les $n$ composantes représentent la solution du problème discrétisé à l'instant $\tau = (j-1)\delta\tau$ aux points $(\delta\xi, \ldots, i\delta\xi, \ldots, n\delta\xi)$

$[U^*]_j$ dépend des solutions aux époques précédentes par l'intermédiaire de $\underset{\sim\delta}{f}(\xi,\tau)$ et $\underset{\sim\delta}{g}(\xi,\tau)$ ; plus précisément on a l'algorithme suivant pour $j > 4$

$$\{A\}[\tilde{U}^*]_j = \{B\}[\tilde{U}^*]_{j-1} + \{C\}[\tilde{U}^*]_{j-2} + \{D\}[U^*]_{j-3} + [E] = [V] \qquad (1.6)$$

$\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}$ sont des matrices carrées ( $n \times n$ ), $[E]$ est un vecteur constant.

## 2 - COMPARAISON DE LA METHODE DE DISCRETISATION UTILISEE AVEC LA METHODE DE DISCRETISATION DE L'OPERATEUR DE GREEN

D'après le § 1 on a remplacé les opérateurs différentiels $L_\tau$ et $D_\tau$ par des opérateurs discrétisés $L_\tau^\delta$ et $D_\tau^\delta$ (1.5). On peut également discrétiser l'équation (1.4) en remplaçant l'intégrale figurant au second membre par une somme finie, les dérivées par rapport au temps étant remplacées par les mêmes expressions que dans la méthode précédente.

On obtient ainsi à chaque instant $\tau_j = (j-1)\,\delta\tau$ un système linéaire dont on déduit une nouvelle solution approchée $[U^{**}]_j$. Chaque composante $U^{**}_{i,j}$ vérifie l'équation aux différences obtenue à partir de (1.4)

$$U^{**}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta\xi\, G_{i,k} \left\{ \frac{48}{K'} - \frac{2U^{**}_{k,j} - 3U^{**}_{k,j-1} + 4U^{**}_{k,j-2} - U^{**}_{k,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right\}$$

$$+ G_{j-1,\,j-1} \left[ 48 - K' \frac{2U^{**}_{j-1,j} - 5U^{**}_{j-2,j-1} + 4U^{**}_{j-3,j-2} - U^{**}_{j-4,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right] \qquad (2.1)$$

avec $G_{i,k} = G(i\,\delta\xi,\, k\,\delta\xi)$ donné par (1.4)bis dans le cas particulier considéré d'un pont sur deux appuis simples d'inertie constante parcouru par une masse unique non suspendue. Rappelons d'autre part que $\delta\tau = \frac{\delta\xi}{\sqrt{K}}$ .

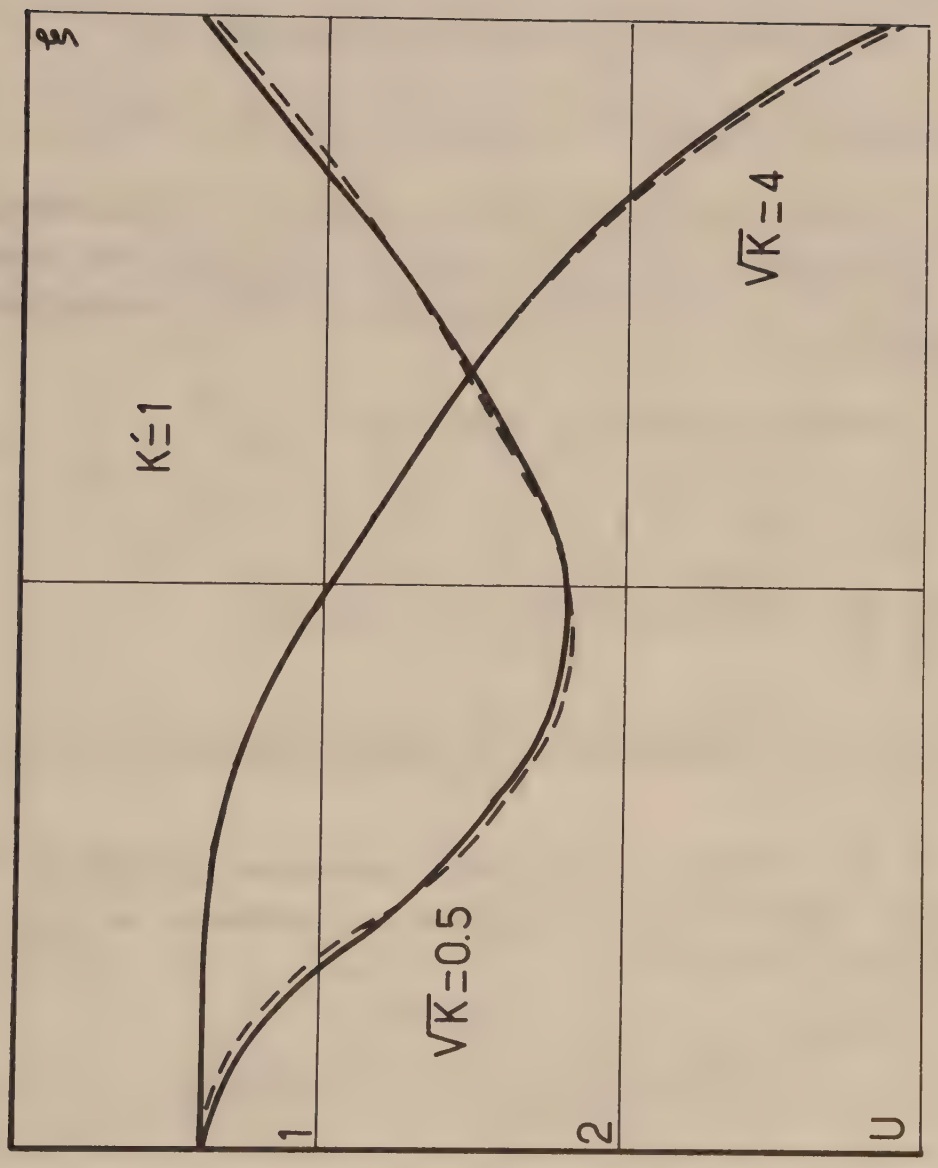



Fig. 1

La comparaison des solutions $\left[U^*_j\right]$ et $\left[U^{**}_j\right]$ est très satisfaisante, ainsi que le montre la figure 1, où $\left[U^{**}_j\right]$ correspond au tracé en pointillé.

La solution $\left[U^*_j\right]$ résulte de l'algorithme (1.6)

$$\{A\}\left[U^*\right]_j = \{B\}\left[U^*\right]_{j-1} + \{C\}\left[U^*\right]_{j-2} + \{D\}\left[U^*\right]_{j-3} = [V]$$

La formule (2.1) présente l'avantage d'être plus maniable. On va maintenant montrer qu'en l'appliquant à $[U^*]$ elle permet une estimation très correcte de la norme de $\{A^{-1}\}$, ce qui est une nouvelle preuve de l'équivalence des deux discrétisations.

Appliquons en effet la formule (2.1) à $U^*$

$$U^*_{i,j} + \frac{2}{(\delta\tau)^2} \sum_{k=1}^{n} \delta\xi \; G_{i,k} \; U^*_{k,j} + \frac{2}{(\delta\tau)^2} G_{j-1,j-1} \; K' \; U^*_{j-1,j} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \delta\xi \; G_{i,k} \left[ \frac{48}{K'} - \frac{-5U^*_{k,j-1} + 4U^*_{k,j-2} - U^*_{k,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right]$$

$$+ G_{j-1,j-1} \left[ 48 - K' \frac{-5U^*_{j-2,j-1} + 4U^*_{j-3,j-2} - U^*_{j-4,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right] \quad (2.2)$$

si $U^*_{i,j}$ est de signe constant, ce qui revient à supposer que tous les points de la poutre vibrent en phase - hypothèse que confirment les résultats numériques - on a l'inégalité :

$$\left|U^*_{i,j}\right| + \frac{2K'G_{j-1,j-1}}{(\delta\tau)^2} \left|U^*_{j-1,j}\right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} \delta\xi \; G_{i,k} \left[ \frac{48}{K'} - \frac{-5U^*_{k,j-1} + 4U^*_{k,j-2} - U^*_{k,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right] \right|$$

$$+ \left| G_{j-1,j-1} \left[ 48 - K' \frac{-5U^*_{j-2,j-1} + 4U^*_{j-3,j-2} - U^*_{j-4,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right] \right| \quad (2.3)$$

Pour ne pas avoir à diviser par des quantités très petites dans la résolution numérique, on a multiplié l'équation (1-1), autrement dit toutes les compo-

santes de $[\,V\,]$ sauf $V_{j-1}$, par $(\delta\xi)^4$ et l'équation (1.2), soit $V_{j-1}$ par $(\delta\xi)^3$ ; la norme (*) du vecteur $[\,V\,]$, second membre de (1.6) est donc

$$\| [V] \| = \sup \left\{ \sup_i \left| \frac{48(\delta\xi)^4}{K'} - K(\delta\xi)^2 \left[ -5U^*_{i,j-1} + 4U^*_{i,j-2} - U^*_{i,j-3} \right] \right| , \right.$$

$$\left. \left| 48(\delta\xi)^3 - KK'\,\delta\xi \left[ -5U^*_{j-2,j-1} + 4U^*_{j-3,j-2} - U^*_{j-4,j-3} \right] \right| \right\}$$

d'après (2.3)

$$|U^*_{i,j}| + \frac{2K'G_{j-1,j-1}}{(\delta\tau)^2} |U^*_{j-1,j}| \leq \left[ \frac{\sum_{k=1}^{n} G_{i,k}\,\delta\xi}{(\delta\xi)^4} + \frac{G_{j-1,j-1}}{(\delta\xi)^3} \right] \| \,|V|\, \|$$

or $$\sum_{k=1}^{n} G_{i,k}\,\delta\xi = \int_0^1 G(\xi_i,\eta)\,d\eta + O(\delta\xi^2)$$

$$= \frac{\xi_i(\xi_i - 1)(\xi_i^2 - \xi_i - 1)}{24} + O(\delta\xi^2)$$

et $G_{j-1,j-1} = \frac{\sigma^2(\sigma-1)^2}{3}$ avec $\sigma = (j-1)\,\delta\tau$

par conséquent si $\| [U^*]_j \| = |U^*_{i,j}|$

$$\| \,|U^*|_j\, \| \leq \left[ \frac{\xi_i(\xi_i - 1)(\xi_i^2 - \xi_i - 1)}{24(\delta\xi)^4} + \frac{\sigma^2(\sigma-1)^2}{3(\delta\xi)^3} \right] \| \,|V|\, \|$$

d'où un majorant de $\| \{A^{-1}\} \|$ en remarquant que le maximum du crochet est obtenu pour $\xi_i = \sigma = \frac{1}{2}$

$$\| \{ A^{-1} \} \| \leq \frac{1}{(\delta\xi)^4} \left( \frac{5}{384} + \frac{\delta\xi}{48} \right)$$

(*) : *pour le choix des normes voir § 3.1*

| n | 9 | 19 | 29 | 39 | 49 | 59 | 69 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 |
| $M_{\sigma=0}$ | 130 | 2083 | 10547 | 33333 | 81380 | 168750 | 312630 |
| INF $\|\| A^{-1} \|\|$ calculé | 65 | 391 | 839 | 1660 | 3121 | 5419 | 7925 |
| SUP $\|\| A^{-1} \|\|$ calculé | 130 | 2083 | 10547 | 33333 | 81380 | 168750 | 312630 |

fig. 2

La formule (2.2) permet également la détermination d'un minorant de $|| \{ A^{-1} \} ||$ ; en effet pour $i = 0$ $U^*_{i,j} = G_{i,j} = 0$ et

$$\frac{2}{(\delta\tau)^2} \; G_{j-1,j-1} \; K' \; U^*_{j-1,j} = G_{j-1,j-1} \left[ 48 - K' \; \frac{- 5U^*_{j-2,j-1} + 4U^*_{j-3,j-2} - U^*_{j-4,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right]$$

d'où

$$\left| U^*_{j-1,j} \right| = \frac{(\delta\tau)^2}{2 K'} \left| 48 - K' \; \frac{- 5U^*_{j-2,j-1} + 4U^*_{j-3,j-2} - U^*_{j-4,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right|$$

or $|| \; | U^* |_j \; || \geq \left| U^*_{j-1,j} \right|$

et par ailleurs $|| \; | U^* |_j \; || < || \{ A^{-1} \} || . || [ V ] ||$

par conséquent

$$|| \{ A^{-1} \} || \geq \frac{1}{2\delta\xi KK'} \; \frac{\left| 48(\delta\xi)^3 - KK' \delta\xi \left[ - 5U^*_{j-2,j-1} + 4U^*_{j-3,j-2} - U^*_{j-4,j-3} \right] \right|}{|| [ V ] ||}$$

$$|| \{ A^{-1} \} || \geq m = \frac{1}{2\delta\xi \; KK'}$$

La figure 2, où sont reportées les valeurs de m et M ainsi que les valeurs correspondantes calculées (pour $K' = 1$ et $\sqrt{K} = 0{,}5$) montre que les estimations réalisées sont correctes, tout particulièrement pour M.

## 3 - ESTIMATION ET MAJORATION DE L'ERREUR

A chaque instant $\tau_j = (j - 1)\delta\tau$ la résolution de (1.5), c'est-à-dire du système linéaire (1.6) fournit une solution approchée

$$[U'^{*}]_j = [\tilde{U}]_j + [\delta U_1]_j + [\delta U_i']_j + [\delta U_2]_j$$

$$= [U^{*}]_j + [\delta U_1]_j + [\delta U_i']_j$$

différente de la solution exacte $[\tilde{U}]_j$

$[\delta U_1]_j$ provient des erreurs commises dans la résolution du système linéaire (1.6) à l'époque j.

$[\delta U_i']_j$ provient des erreurs commises dans la résolution aux époques antérieures

$$[\delta U_i']_j = \{A^{-1}\}\{B\}[\delta U_1]_{j-1} + \{A^{-1}\}\{C\}[\delta U_1]_{j-2}$$

$$+ \{A^{-1}\}\{D\}[\delta U_1]_{j-3}$$

$[\delta U_2]_j$ est l'erreur systématique due à la discrétisation.

## 3.1 - ERREUR $\delta U_1$ INTRODUITE PAR LA RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

Soit de façon générale un système linéaire

$$AX = B$$

La résolution numérique donne une solution approchée $Y$ pour laquelle

$$AY = B + R$$

par suite

$$Y - X = A^{-1}(B + R) - A^{-1}B = A^{-1}R$$

Désignons par $||\ .\ ||$ les normes matricielles et vectorielles associées

$$||B|| = ||AX|| \leqslant ||A|| \times ||X||$$

$$||X|| \geqslant \frac{||B||}{||A||} = ||A||^{-1} \times ||B||$$

l'erreur relative peut être définie par le nombre

$$\varepsilon = \frac{||Y - X||}{||X||}$$

| n | 9 | 19 | 29 | 39 | 49 | 59 | 69 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon \leq$ | $0{,}1.10^{-7}$ | $0{,}8.10^{-6}$ | $0{,}7.10^{-5}$ | $0{,}2.10^{-3}$ | $0{,}7.10^{-3}$ | $0{,}7.10^{-2}$ | $0{,}6.10^{-2}$ |

Fig. 3

qui vérifie

$$\varepsilon \leq \frac{|| A^{-1} || \times || R ||}{|| A ||^{-1} \times || B ||} = K(A) \frac{|| R ||}{|| B ||}$$

avec $K(A) = \dfrac{|| A^{-1} ||}{|| A ||^{-1}}$

K(A) est le conditionnement de la matrice A

$$\varepsilon = \frac{|| \delta U_1 ||}{|| U^* + \delta U'_1 ||} \leq K(A) \frac{|| R ||}{|| B ||}$$

dans le problème étudié, c'est la matrice $\{A\}$ que l'on doit inverser et le second membre est le vecteur $[V]$ de (1.6).
On a choisi comme norme vectorielle

$$|| X || = \operatorname{Sup}_i | X_i |$$

la norme matricielle associée étant

$$|| A || = \operatorname{Sup}_i \left[ \sum_j |a_{ij}| \right]$$

A la figure 3 on a reporté les valeurs de $K(\{A\}) \dfrac{|| R ||}{|| V ||}$ calculées pour divers maillages, n variant de 9 à 69. On constate que la précision peut devenir moins bonne lorsque le maillage devient plus fin, c'est-à-dire lorsque la taille des systèmes linéaires augmente ; en effet lorsque n croit $K(\{A\}) \dfrac{|| R ||}{|| V ||}$ (qui est un majorant de $\varepsilon$ ) croit également.

## 3.2 - DEPENDANCE DES CONDITIONS INITIALES ET STABILITE

D'après le § 2, $U^*$ vérifie (2.1)

$$U^*_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta\xi \, G_{i,k} \left\{ \frac{48}{K'} - \frac{2U^*_{k,j} - 5U^*_{k,j-1} + 4U^*_{k,j-2} - U^*_{k,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right\}$$

$$+ G_{j-1,j-1} \left[ 48 - K' \frac{2U^*_{j-1,j} - 5U^*_{j-2,j-1} + 4U^*_{j-3,j-2} - U^*_{j-4,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right]$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$\left\{ \dot{I}^* + \frac{2K}{(\delta\xi)^2} J_j \right\} [U^*]_j = \frac{K}{(\delta\xi)^2} \left\{ J_j \right\} \left( 5 [U^*]_{j-1} - 4 [U^*]_{j-2} + [U^*]_{j-3} \right) + \sum_{k=1}^{n} \delta\xi \, G_{i,k} \frac{48}{K'} + G_{j-1,j-1} \times 48$$

avec $J_j = ( \delta\xi G_{i,k} + \delta^{**}_{i,j-1} K' G_{j-1,j-1} )$

Supposons que $[U^*]_1$ subisse une variation $\Delta [U^*]_1$ ; il en résulte une variation $\Delta [U^*]_j$ de la solution à l'époque $j$ qui vérifie

$$\left\{ \dot{I} + \frac{2K}{(\delta\xi)^2} J_j \right\} \Delta [U^*]_j = \frac{K}{(\delta\xi)^2} \left\{ J_j \right\} \left( 5 \Delta [U^*]_{j-1} - 4 \Delta [U^*]_{j-2} + \Delta [U^*]_{j-3} \right)$$

pour $v_j = || \Delta [U^*]_j ||$ on a l'inégalité

$$v_j \leq \frac{K}{(\delta\xi)^2} || \left\{ \dot{I} + \frac{2K}{(\delta\xi)^2} J_j \right\} \left\{ J_j \right\} || (5v_{j-1} + 4v_{j-2} + v_{j-3})$$

Soit a un majorant de $\frac{K}{(\delta\xi)^2} || \left\{ \dot{I} + \frac{2K}{(\delta\xi)^2} J_j \right\}^{-1} \left\{ J_j \right\} ||$

Un calcul analogue à celui qui a conduit à l'estimation de $M = \text{Sup} || \{ A^{-1} \} ||$ au § 2 montre que l'on peut choisir

$$a = \frac{K}{(\delta\xi)^2} \underset{\xi,\sigma}{\text{Sup}} \left\{ \frac{\xi(\xi - 1)(\xi^2 - \xi - 1)}{24} + \frac{\sigma^2 (\sigma - 1)^2}{3} \right\}$$

d'où $a = 0{,}034 \frac{K}{(\delta\xi)^2} = 0{,}034 \, K(n+1)^2$

* $\dot{I}$ est la matrice identité

** $\delta_{i,j}$ est le symbole de KRONECKER, égal à 1 si i = j et à 0 sinon

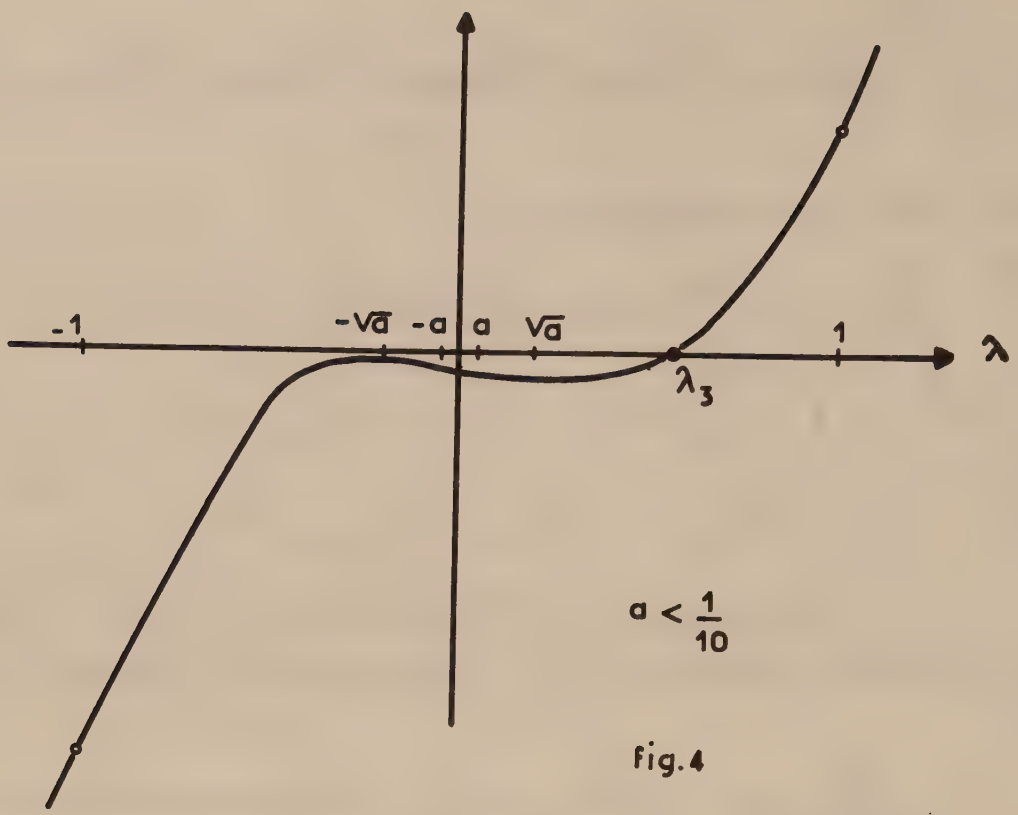

-1
$-\sqrt{a}$
-a
a
$\sqrt{a}$
1
λ
$\lambda_3$
$a < \frac{1}{10}$

Fig. 4

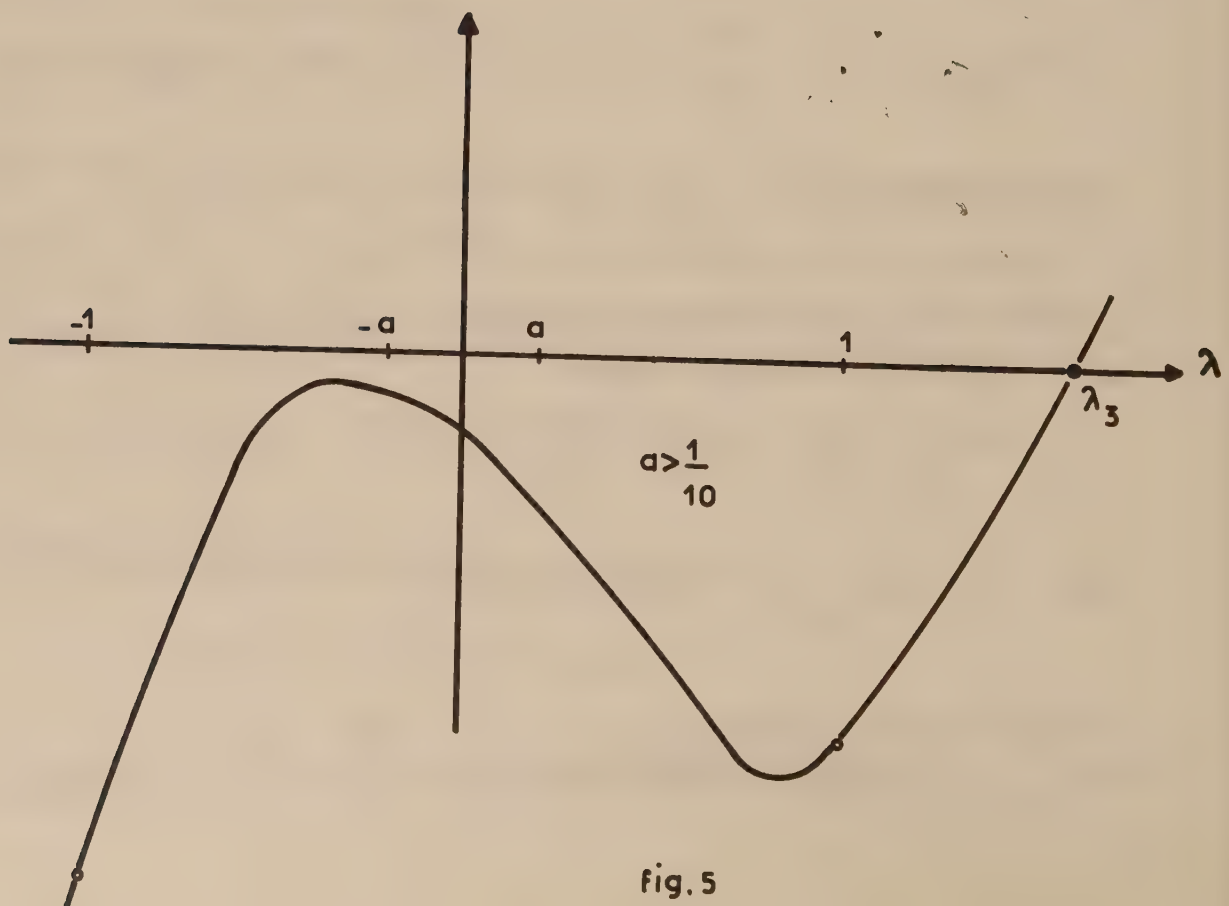

-1
-a
a
1
λ
$\lambda_3$
$a > \frac{1}{10}$

Fig. 5

On voit que $v_j$ est majoré par la suite positive $u_j$ solution de

$$u_j = a ( 5 u_{j-1} + 4 u_{j-2} + u_{j-3} )$$

et prenant les mêmes valeurs initiales

— si a est inférieur à $\frac{1}{10}$ les 3 racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de l'équation caractéristique

$$\lambda^3 - a ( 5 \lambda^2 + 4 \lambda + 1 ) = 0$$

sont distinctes et inférieures à 1 en module ; de plus

$$0 < a < \sqrt{a} < \lambda_3 < 1 \qquad \text{(fig. 4)}$$

la solution $u_j$ est de la forme

$$u_j = \alpha \ (\lambda_1)^j + \beta \ (\lambda_2)^j + \gamma \ (\lambda_3)^j$$

elle tend vers zéro lorsque j tend vers l'infini.

— si a est supérieur ou égal à $\frac{1}{10}$ les 3 racines sont toujours distinctes et l'on a $0 < \text{Sup } (a, 1) < \lambda_3$ (fig. 5)

La solution $u_j$ tend donc vers l'infini avec j, sauf si $a = \frac{1}{10}$ .

Les constantes $\alpha, \beta, \gamma$ dépendent linéairement des valeurs initiales et donc de $v_1 = || \Delta \ [U^*]_1 ||$

Pour que la méthode soit stable, c'est-à-dire qu'à une petite variarion $\Delta \ [U^*]_1$ des valeurs initiales corresponde une petite variation de $\Delta \ [U^*]_j$ il ne faut pas que le nombre n de points du maillage soit trop important car sinon $a = 0{,}034 \ (n+1)^2 \ K$ peut devenir supérieur à $\frac{1}{10}$ et $u_j \geq || \Delta \ [U^*]_j ||$ augmente alors d'autant plus vite que a est grand puisque $\lambda_3$ est supérieur à a .

Cependant n ne doit pas non plus être choisi trop petit de manière à ce que l'influence des conditions initiales ne soit pas rapidement "amortie" du fait de la décroissance de $u_j$ lorsque a est inférieur à $\frac{1}{10}$ .

Ce qui vient d'être fait pour les conditions initiales est également valable pour les erreurs $[ \delta U_1 ]$ souvenant à une époque k quel-

conque et pour les erreurs $[\delta U'_1]$ qui en résultent aux époques ultérieures.

En fait il semble que la majoration en norme réalisée soit très forte car on n'a pas constaté de perte de stabilité de la méthode mais plutôt un certain amortissement, même pour a supérieur à $\frac{1}{10}$, corrigé en partie par l'accroissement de n.

3.3 - ERREUR SYSTEMATIQUE $\delta U_2$

Par définition $U(\xi,\tau)$ est solution de (1.4)

$$U(\xi,\tau) = \int_0^1 G(\xi,\eta)\left[\frac{48}{K'} - \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}(\eta,\tau)\right] d\eta$$

$$+ G(\sigma,\sigma)\left[48 - K'\frac{d^2U}{d\tau^2}(\sigma,\tau)\right]_{\sigma=\sqrt{K'}\tau}$$

discrétisons cette équation en remarquant que

$$\int_0^1 G(\xi,\eta)\, f(\eta)\, d\eta = \sum_{k=1}^{n} \delta\xi\, G_{i,k}\, f_k + \frac{(\delta\xi)^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[G(\xi,\eta)\, f(\eta)\right]_{\eta=\mu} \qquad 0<\mu<1$$

et que d'autre part les dérivées peuvent être écrites sous forme de différences

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}(\eta,\tau) = \frac{2U(\eta,\tau) - 5U(\eta,\tau-\delta\tau) + 4U(\eta,\tau-2\delta\tau) - U(\eta,\tau-3\delta\tau)}{(\delta\tau)^2} + \frac{(\delta\tau)^2}{24}\phi(\eta,\tau)$$

$$\frac{d^2U}{d\tau^2}(\sigma,\tau) = \frac{2U(\sigma,\tau) - 5U(\sigma-\delta\xi,\tau-\delta\tau) + 4U(\sigma-2\delta\xi,\tau-2\delta\xi) - U(\sigma-3\delta\xi,\tau-3\delta\tau)}{(\delta\tau)^2}$$

$$+ \frac{(\delta\tau)^2}{24}\psi(\tau)$$

les fonctions $\phi(\eta,\tau)$ et $\psi(\tau)$ dépendent linéairement des dérivées d'ordre quatre $\frac{\partial^4 U}{\partial\tau^4}$ et $\frac{d^4U}{d\tau^4}$ ; d'après les paragraphes III(1.1) et III (1.3) elles sont donc continues et bornées si U appartient à $\mathcal{E}^\circ$ .

Il vient après la discrétisation indiquée

$$U_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta\xi \; G_{i,k} \left[ \frac{48}{K'} - \frac{2U_{k,j} - 5U_{k,j-1} + 4U_{k,j-2} - U_{k,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{(\delta\tau)^2}{24} \phi_{k,j} \right] + \frac{(\delta\xi)^2}{12} \frac{\partial^2}{(\partial\eta)^2} \left\{ G(\xi_i,\eta) \left[ \frac{48}{K'} - \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}(\eta, \tau_j) \right] \right\}_{\eta = \mu}$$

$$+ G_{j-1,j-1} \left[ 48 - K' \frac{2U_{j-1,j} - 5U_{j-2,j-1} + 4U_{j-3,j-2} - U_{j-4,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right.$$

$$\left. - K' \frac{(\delta\tau)^2}{24} \psi_j \right]$$

$[U^*] = [\tilde{U}] + [\delta U_2]$ est solution de l'équation dans laquelle ne figurent pas les termes en $(\delta\xi)^2$ et $(\delta\tau)^2$ ; par différence on obtient donc l'équation que vérifie $[\delta U_2]$

$$(\delta U_2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta\xi \, G_{i,k} \left[ - \frac{2(\delta U_2)_{k,j} - 5(\delta U_2)_{k,j-1} + 4(\delta U_2)_{k,j-2} - (\delta U_2)_{k,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right]$$

$$+ G_{j-1,j-1} \left[ - K' \frac{2(\delta U_2)_{j-1,j} - 5(\delta U_2)_{j-2,j-1} + 4(\delta U_2)_{j-3,j-2} - (\delta U_2)_{j-4,j-3}}{(\delta\tau)^2} \right]$$

$$+ W_{i,j} \qquad (3.3.1)$$

avec $$W_{i,j} = (\delta\xi)^2 \left\{ - \sum_{k=1}^{n} \delta\xi \, G_{i,k} \frac{\phi_{k,j}}{24 K} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \left[ G(\xi_i,\eta) \left( \frac{48}{K'} - \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}(\eta,\tau_j) \right) \right]_{\eta = \mu} - K' G_{j-1,j-1} \frac{\psi_j}{24 K} \right\}$$

comme précédemment la forme matricielle de l'égalité (3.3.1)

$$[\delta U_2]_j = \frac{K}{(\delta\xi)^2} \left\{ \dot{I} + \frac{2K}{(\delta\xi)^2} J_j \right\}^{-1} \left\{ J_j \right\} \left( 5 [\delta U_2]_{j-1} \right.$$

$$\left. - 4 [\delta U_2]_{j-2} + [\delta U_2]_{j-3} \right)$$

$$+ \left\{ \dot{I} + \frac{2K}{(\delta\xi)^2} J_j \right\}^{-1} [W]_j$$

permet d'obtenir la majoration en norme

$$v_j \leq a\,(\,5\,v_{j-1} + 4\,v_{j-2} + v_{j-3}\,) + b$$

en posant $\| [\,\delta U_2\,]_j \| = v_j$

et en choisissant pour $b$ un majorant de $\| \left\{ \dot{I} + \frac{2K}{(\delta\xi)^2}\, J_j \right\}^{-1} [\,W\,]_j \|$

Soit $u_j$ la solution de l'équation

$$u_j = a\,(\,5\,u_{j-1} + 4\,u_{j-2} + u_{j-3}\,)$$

— si $a$ est différent de $\frac{1}{10}$

$$v_j \leq u_j + \frac{b}{1 - 10\,a}$$

— si $a$ est égal à $\frac{1}{10}$

$$v_j \leq u_j + \frac{10}{16}\, b_j$$

Pour $a < \frac{1}{10}$ $u_j$ décroit et tend vers zéro lorsque $j$ croit ; par contre $u_j$ croit avec $j$ si $a$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{10}$ (voir § 3.2)

Il faut remarquer que $b$ est certainement petit. En effet $\| \left\{ \dot{I} + \frac{2K}{(\delta\xi)^2}\, J_j \right\}^{-1} \|$ semble varier peu avec $n$, soit $M'$ sa borne supérieure. Le terme $\| [\,W\,]_j \|$ est proportionnel à $(\delta\xi)^2$ et tend donc vers zéro avec $\delta\xi$*

$$\| [\,W\,]_j \| < C\,(\delta\xi)^2$$

On peut donc choisir $b = (\delta\xi)^2\, M'\, C$

* : *d'après les hypothèses faites sur $U$ on a vu que les dérivées de $U$ jusqu'à l'ordre 4 et les fonctions $\phi$ et $\psi$ figurant dans l'expression de $W_{i,j}$ sont bornées ; par suite on peut définir une constante $C$ telle que*

$$\| [\,W\,]_j \| < C\,(\delta\xi^{\,2})$$

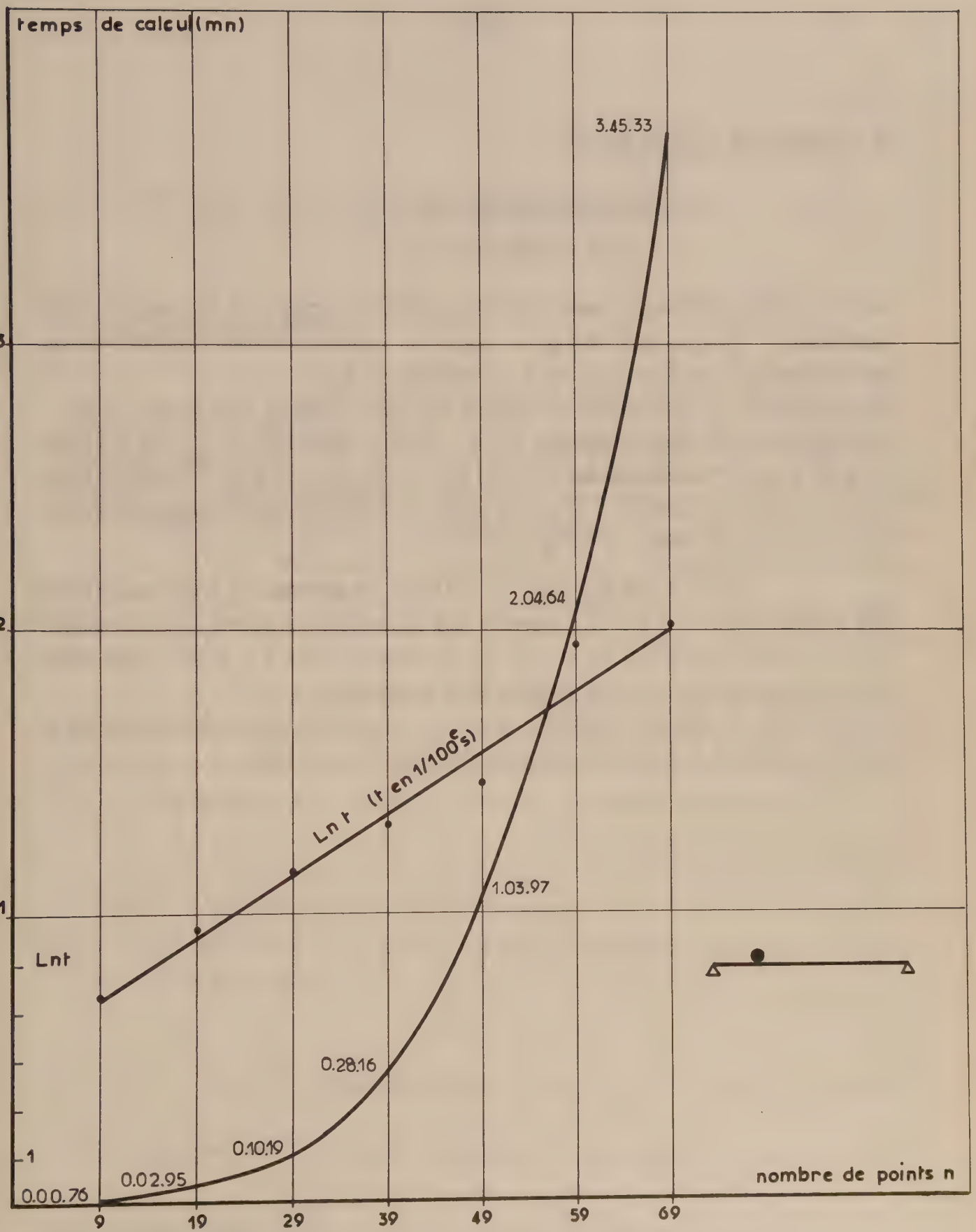

temps de calcul (mn)
3.45.33
2.04.64
1.03.97
0.28.16
0.10.19
0.02.95
0.00.76
Ln t (t en 1/100e s)
Lnt
3
2
1
1
9
19
29
39
49
59
69
nombre de points n

fig. 6

## 4 - CONCLUSION : CHOIX DU PAS

Le paramètre essentiel est :

$$a = 0{,}034\ K(n+1)^2$$

Une condition suffisante (mais non nécessaire) de stabilité est que $a$ soit inférieur à $\frac{1}{10}$, ce qui limite $n$ pour $K$ donné et risque d'entrainer un amortissement trop important dû à la méthode (§ 3.2).
En augmentant $n$ on corrige en partie cet amortissement fictif mais l'erreur systématique peut augmenter si $a$ devient supérieur à $\frac{1}{10}$ (§ 3.3) et de plus à partir de certaines valeurs de $n$ la précision de l'inversion numérique risque de diminuer (§ 3.1). Enfin le temps de calcul augmente de façon exponentielle avec $n$ (fig. 6).

Etant donné que dans la pratique la méthode ne s'est jamais avérée instable (pour $n \leq 69$) il semble que le nombre de points $n$ doive être choisi si possible entre 29 et 49, les grandes valeurs ( $n \geq 49$) étant réservées aux cas particuliers d'essieux très rapprochés.
D'autre part il semble préférable d'adopter un nombre de points voisin de 49 pour les ouvrage à plusieurs travées ou d'inertie variable.

# V - METHODE EXPERIMENTALE ET RESULTATS*

## 1 - METHODE EXPERIMENTALE

L'inconvénient des essais en vraie grandeur est que de nombreux paramètres inconnus entrent en jeu, ceci provenant par exemple de la mauvaise connaissance des conditions d'appui, à la présence de vibrations parasites de pièces constituant le tablier ou bien encore à la torsion de celui-ci. D'autre part la nécessaire schématisation des véhicules introduit également une certaine imprécision. Ajoutons enfin que l'organisation pratique de ces essais nécessite la prévision de circulations particulières et ne peut par conséquent faire abstraction des contraintes dues à l'exploitation régulière.

Ces inconvénients conduisent naturellement à imaginer un essai sur modèle réduit, toujours possible puisque l'étude est faite sous forme adimensionnelle ; il faut seulement parvenir à réaliser un modèle pour lequel les paramètres sans dimension prennent les valeurs voulues.

On a choisi de simuler sur modèle les effets d'une masse $M$ non suspendue parcourant une travée de portée $\ell$ et de masse par unité de longueur $\rho S$ reposant sur deux appuis simples.
Dans ce cas élémentaire les paramètres sans dimension gouvernant le phénomène se réduisent à deux :

$$K' = \frac{M}{\rho S \ell}$$

et $\sqrt{K} = \ell \, v \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$ proportionnel au rapport $\frac{T}{(\frac{\ell}{v})}$ de la période fondamentale d'oscillation $T$ au temps de passage de la charge

* : *les planches de résultats sont reportées à l'annexe 7*

$$\sqrt{K} = \frac{\pi}{2} \frac{T}{(\frac{\ell}{v})}$$

E est le module d'élasticité du matériau constituant la travée et $\dot{I}$ l'inertie de sa section

Pour faire varier K' on peut agir sur la masse M de la charge ou sur celle de la travée. Le paramètre $\sqrt{K}$ varie proportionnellement à la longueur et à la vitesse. Il est inversement proportionnel à la racine carrée de $\dot{I}$ et également à celle de E, ce qui entraine que le choix du matériau peut intervenir. Des essais en modèle réduit, organisés par l'ORE [13], ont utilisé cette propriété ; elle a permis, en utilisant un modèle en plexiglas de module E faible, d'obtenir de grandes valeurs de $\sqrt{K}$ et de simuler des vitesses élevées sur les ouvrages réels avec des vitesses sur modèle plus faibles que si celui-ci était constitué d'un matériau de module plus élevé.

Le principe adopté pour le dispositif réalisé est différent : le matériau retenu est l'acier, ce qui présente l'avantage d'éliminer la viscosité que pourrait présenter le plexiglas . Le modèle réduit est un chemin de roulement constitué de deux plats en acier reliés par des entretoises et parcouru par un chariot à huit roues dont quatre sont disposées sous le chemin de roulement, de façon à éviter que le chariot ne quitte celui-ci sous l'effet des vibrations (pl. 1)

Le lancement du chariot est assuré par un moteur électrique et deux travées de mesure sont prévues, longues respectivement de 1,8 et 3,8 mètres (pl. 2). La masse du chariot peut varier grâce à des plaques en plomb que l'on peut y fixer. Au bout du chemin de roulement la masse roulante vient s'arrêter dans un berceau en bois rempli de coussins en polyesther. L'énergie cinétique est ainsi dissipée relativement lentement par déformation élastique du polyesther et mise en mouvement du berceau freiné par le frottement sur le sol.

Du point de vue de la réalisation du modèle une attention particulière a été portée au respect des conditions aux limites prises en compte dans le calcul théorique ; pour cela l'un des appuis de chaque travée de mesure autorise la rotation seulement alors que le deuxième autorise la rotation et la translation grâce à un dè en bronze tournant sur l'axe d'appui et lui-même glissant dans une ouverture rectangulaire ménagée dans les plats (pl. 3)

La deuxième difficulté pratique concerne le lancement du chariot. La masse M de celui-ci varie de 8,5 kg à 20 kg environ alors que la masse des travées de 1,8 et 3,8 mètres est approximativement de 10 et 21 kg. D'autre part l'inertie I des travées constituées de 2 plats de 50 x 5 est

$$I = 10{,}416 \times 10^4 \ \frac{\text{mm}^4}{}$$

Evaluons les coefficients K' et $\sqrt{K}$ gouvernant le phénomène :

- pour la travée de 1,8 mètre

$$0{,}8 < K' < 2$$

$$\text{et } \sqrt{K} = \ell \, v \sqrt{\frac{\rho S}{EI}} = 0{,}029 \, v$$

(v en mètre par seconde)

- pour la travée de 3,8 mètre

$$0{,}4 < K' < 0{,}95$$

$$\text{et } \sqrt{K} = 0{,}060 \, v$$

On voit donc que pour faire varier suffisamment $\sqrt{K}$ on doit faire varier v. D'après le § V 2.3.2.2 pour des ouvrages réels $\sqrt{K}$ varie entre 0 et 1,4 environ lorsque la vitesse passe de 0 à 250 km/h. Il suffit donc de limiter à 20 m/S la vitesse du chariot car on voit que pour cette valeur $\sqrt{K}$ atteint 1,2 dans la travée de 3,8 mètres.

Le lancement du chariot est assuré sur une travée de 10 mètres au moyen d'un moteur électrique par l'intermédiaire de deux chaines et de quatre pignons d'entrainement dont deux sont fixés sur l'arbre moteur.

Les deux chaines de 20 mètres chacune ont un brin supérieur tendu et un brin inférieur mou et sont disposées de part et d'autre de la travée de lancement entre l'axe du moteur et l'axe de renvoi (pl. 2). Le brin supérieur vient s'appuyer sur des roues dentées placées sur les supports 2,3 et 4 ; la flèche maximale que peut prendre le brin supérieur est ainsi limitée. Le brin inférieur mou est maintenu par des tendeurs.

Le mouvement de la chaine est transmis au chariot grâce à un maillon plus large venant s'appuyer sur une fourchette portée par un palonnier lié au chariot (pl. 1 bis). Au passage sur le pignon moteur le chariot poursuit sa cour-

se librement alors que les maillons d'entrainement passent sur le brin inférieur.
On peut ainsi faire varier la vitesse du chariot en plaçant les maillons d'entrainement et le chariot plus ou moins loin du pignon moteur avant la mise en route.
Les caractéristiques du moteur doivent permettre d'élever la vitesse du chariot, de masse maximum 20 kg, jusqu'à 20 m/s sans engendrer de rupture des chaines.
Soient m et m' la masse des chaines et des pignons de rayon r ; si C est le couple du moteur et $\omega$ sa vitesse angulaire

$$\frac{1}{2}\,(M+m)\,v^2 + \frac{1}{2}\,J\omega^2 = \int_0^t C\,\omega\,dt$$

avec $J = \frac{1}{2}\,m'\,r^2$

en dérivant par rapport au temps

$$(M+m)\,v\,\frac{dv}{dt} + J\omega\,\frac{d\omega}{dt} = C\omega$$

soit, puisque $v = \omega r$

$$C = \left[\,(M+m) + \frac{m'}{2}\,\right]\gamma r$$

avec deux chaines de 20 mètres type vélo de 288 grammes par mètre

$$m = 11{,}52 \text{ kg}$$

pour les quatre pignons

$$m' = 16{,}6 \text{ kg} \qquad r = 0{,}291 \text{ m}$$

si l'on admet que le lancement se fait sur 10 mètres et que l'accélération $\gamma$ y est constante, on a d'après la relation $v = \sqrt{2\,\gamma\ell}$

$$\gamma = \frac{v^2}{2\ell} = 20 \text{ m/S}$$

par conséquent pour M = 20 kg

$$C = 39{,}8 \times 20 \times 0{,}129 = 103 \text{ m N}$$

Le moteur choisi est un moteur asynchrone de 7,5 kW à 1500 t/min dont le rotor est à cage d'écureuil à encoches profondes. Le couple varie de $C_D$ = 104 mN

au démarrage à une valeur maximale $C_M$ de 118 mN, le couple nominal étant de 50 mN à 1500 t/min (pl. 4).

On supposera que pendant le temps très court du lancement ( $t = \sqrt{\frac{2\ell}{\gamma}} = 1$ seconde si $\gamma = 20$ m/s ) le moteur fonctionne toujours dans sa phase de démarrage : C sera compris entre $C_D$ et $C_M$ , sa valeur moyenne étant 111 mN. Par conséquent, puisque

$$= \frac{C}{\left[(M + m) + \frac{m'}{2}\right] r}$$

$$19 < \gamma < 25 \quad m/S^2$$

selon la valeur de M.

Sur une longueur de lancement $\ell$ de 10 mètres la vitesse atteinte est donc voisine de 20 m/S

$$v = \sqrt{2\gamma\ell} > \sqrt{380} = 19{,}5 \text{ m/S}$$

La force exercée par les chaines sur le chariot est

$$F = M\gamma = \frac{M C}{\left[(M + m) + \frac{m'}{2}\right] r}$$

le maximum de F est atteint pour M maximum et vaut 388 Neutons, soit 194 Neutons par chaine, alors que la charge de rupture de celles-ci est de 800 Neutons.

## 2 - RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

### 2.1 - RESULTATS DU CALCUL NUMERIQUE

En utilisant la méthode numérique exposée aux chapitres précédents on a d'abord étudié le cas d'une masse non suspendue unique parcourant un pont sur deux appuis simples, puis une succession de deux masses analogues dont la distance varie. Enfin on a étudié l'influence d'une suspension constituée de ressorts et d'amortisseurs.

L'application de la méthode de calcul a également été faite à un ouvrage à deux travées égales parcouru par une masse unique non suspendue, puis par un convoi, ce dernier cas correspondant à un projet d'ouvrage réel.

L'ensemble de cette étude est faite sous forme adimensionnelle, les paramètres sans dimension étant introduits en II 4.

2.1.1 - MASSE UNIQUE M NON SUSPENDUE SUR UNE POUTRE SUR DEUX APPUIS SIMPLES

Les paramètres sans dimension sont

$$K' = \frac{M}{\rho S \ell}$$

et $\sqrt{K} = \ell v \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$

Les lignes d'influence de la flèche réduite U en milieu de travée (pl. 5,6,7) donnent les effets comparés produits par une masse unique M et deux masses $\frac{M}{2}$ distances de 0,2 $\ell$ pour diverses valeurs des paramètres K' et $\sqrt{K}$, la portée du pont étant divisée en centièmes.

Ces effets sont également mis en évidence par le réseau de courbes donnant le coefficient de majoration dynamique $k_m$ en fonction de $\sqrt{K}$ pour les mêmes valeurs de K' (pl.8).

Les résultats ci-dessus montrent tout d'abord l'augmentation des flèches et des contraintes dynamiques avec K' et $\sqrt{K}$. Les sections où se produisent les flèches et les contraintes dynamiques maximales se déplacent avec $\sqrt{K}$. En ce qui concerne la contrainte dynamique maximale la planche 9 montre que lorsque $\sqrt{K}$ est petit les contraintes dynamiques et statiques se produisent dans la même section - c'est-à-dire au milieu pour une masse unique M - mais que si $\sqrt{K}$ augmente cette section se déplace dans le sens de propagation de la masse roulante. Ce phénomène est sans doute lié à la nature non-suspendue de la charge car il apparait de façon encore plus nette dans certaines études simplifiées [1] où la masse du pont est négligée vis à vis de celle de la masse roulante ; dans ce cas extrême les forces d'inertie proviennent seulement de l'accélération verticale de la masse roulante car celles qui sont normalement mises en jeu dans l'ouvrage sont négligées.

Le deuxième enseignement à tirer de ces résultats est que l'on peut remplacer deux masses $\frac{M}{2}$ suffisamment rapprochées par une seule

masse M de même centre de gravité. Ceci peut du reste être entendu à une succession de groupes de masses $\frac{M}{2}$, chaque groupe pouvant être remplacé par une masse unique M si les masses constituant chaque groupe sont suffisamment rapprochées. Les courbes (pl. 10 et 11) publiées dans [14] donnent les lignes d'influence en milieu de portée dûes à deux masses M distantes de 1,2 $\ell$ où à deux groupes de deux masses $\frac{M}{2}$ distantes de 0,2 $\ell$ - $\ell$ - 0,2 $\ell$ . On remarquera que l'influence d'une succession de charges devient très importante lorsque $\sqrt{K}$ augmente.

### 2.1.2 - EFFET DE LA DISTANCE ENTRE LES CHARGES

Afin de préciser ce point, on a considéré deux masses roulantes dont la distance $x\ell$ varie de 0,2 $\ell$ à 2 $\ell$ . On a comparé les contraintes dynamiques maximum produites par ces deux masses à celles produites par une seule masse 2 M. Les courbes (pl. 12, 13, 14) pour lesquelles $K' = \frac{2M}{\rho S \ell}$ vaut 0,5 ; 2 ; 4 représentent les variations du rapport de ces quantités en fonction de la distance $x\ell$.

Ce rapport vaut 1 pour x = o, puis décroit, en présentant cependant des maximums relatifs pour certaines distances.

### 2.1.3 - INFLUENCE DE LA SUSPENSION SUR RESSORTS ET AMORTISSEURS

On a comparé les valeurs du coefficient de majoration $k_m$ obtenu pour une masse unique suspendue avec les valeurs de $k_m$ dans le cas d'une masse unique non suspendue ; les courbes (pl. 15) montrent que l'introduction de la suspension vient diminuer les valeurs de $k_m$ et que d'autre part si CR et $\varepsilon$ augmentent (suspension plus "dure") les résultats tendent à se rapprocher du cas non suspendu.

Lorsque la charge roulante unique comporte une partie non suspendue M et une partie suspendue MS les valeurs de $k_m$ se rapprochent davantage du cas non suspendu, tout en demeurant inférieures (pl. 16) ; le rapport $\frac{MS}{M} = 3$ est approximativement celui qui est observé dans les véhicules réels si l'on considère le bogie comme tout entier non suspendu.

Les courbes (pl. 17) montrent que le remplacement de deux charges voisines par une seule est encore valable pour des masses suspendues.

Suivant le choix de la suspension il peut se produire des résonances entre les vibrations des charges roulantes et celles du pont. Ce phénomène est illustré par les planches 18, 19, 20. Le calcul est fait pour une masse unique suspendue, l'amortissement étant nul de même que les conditions initiales (déplacement et vitesse verticaux de la masse suspendue à l'entrée sur le pont).

L'influence de l'amortissement apparait sur les planches 21 à 27. Elles représentent la trajectoire de la masse suspendue (trait pointillé) et celle du point de la poutre situé à la verticale de cette masse (trait continu).

Les planches 28 et 29 se rapportent au cas de 2 masses non suspendues distantes de 0,6 et 1,2 $\ell$ reliées entre elles par une masse suspendue pour laquelle J vaut 1, l'amortissement étant nul. $M_d$ et $M_S$ sont les contraintes maximales réduites dynamiques et statiques. La contrainte maximale se produit dans la section d'indice I (en centièmes de la portée totale) à l'époque J pour laquelle le premier essieu se trouve dans la section d'indice J (en centièmes de la portée totale).

### 2.1.4 - EFFETS PRODUITS PAR LA PRESENCE D'APPUIS INTERMEDIAIRES

Dans un cas de charge simple on compare les effets dynamiques obtenus dans un pont continu à deux travées égales de portée totale $\ell$ et dans des ponts isostatiques de portée $\ell$ et $\frac{\ell}{2}$. Pour le pont hyperstatique il faut naturellement considérer deux coefficients $k_m^-$ et $K_m^+$ selon qu'il s'agit de contraintes minimales négatives ou maximales positives (pl. 30).

La continuité contribue à atténuer les effets dynamiques, tout comme elle le fait d'ailleurs pour les contraintes maximales positives statiques.

La méthode de calcul a également été appliquée à un projet d'ouvrage réel de deux fois 105 mètres de portée destiné à la circulation des rames de banlieue (Pont de Cergy).
L'importance de la portée rend la fréquence fondamentale d'oscillation libre de l'ouvrage voisine de la fréquence basse des suspensions (1 Herz), ce qui pourrait laisser craindre l'apparition d'un phénomène de résonance. En réali-

té le calcul, fait en tenant compte des suspensions des véhicules (ZBD, ZRB, ZRABX), donne les variations des coefficients $k_m^-$ et $k_m^+$ en fonction de $\sqrt{K}$ et ne semble pas déceler de phénomènes d'amplification exagérée des contraintes, ceci jusqu'à des valeurs de $\sqrt{K}$ correspondant à des vitesses élevées (pl. 31, 32)

Les publications consacrées au cas des ouvrages à plusieurs travées semblent assez peu nombreuses. Dans [15] et [16] le cas est envisagé avec cependant l'hypothèse simplificatrice qui consiste à négliger les forces d'inertie dues aux masses non suspendues.

## 2.2 - RESULTATS DES ESSAIS SUR MODELE REDUIT

Les contraintes ont été mesurées au quart, au milieu et aux trois quarts de chacune des travées de 1,80 mètres et de 3,80 mètres. Dans chaque section de mesure quatre jauges sont disposées à la partie inférieure du chemins de roulement, de part et d'autres des plats, ce qui permet d'éliminer les effets parasites dûs à la torsion (pl. 33).

Les flèches ont également été mesurées à l'aide de capteurs de déplacement au voisinage des appuis et au milieu de chacune des travées (pl. 33).

La vitesse moyenne du chariot sur la travée d'essai est connue grâce à deux témoins de proximité placés de part et d'autre de la travée d'essai et produisant un signal électrique au passage du mobile.

On a réalisé huit séries d'essais de manière à faire varier les paramètres sans dimension $K'$ et $\sqrt{K}$.
Les quatre premières séries portent sur la travée de 3,80 mètres : le chariot est d'abord lancé à vide, puis surchargé par une ou plusieurs masses additionnelles. $K'$ prend ainsi les valeurs 0,403 - 0,477 - 0,572 - 0,762, $\sqrt{K}$ variant d'une valeur voisine de 0 à 1 environ, selon la vitesse initiale et la vitesse maximale atteinte.
Pour la travée de 1,80 mètres les quatre dernières séries correspondent à des valeurs de $K'$ de 0,835 - 1,184 et 1,578, une des séries ayant été re-

faite ; $\sqrt{K} = \ell \, v \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$ varie de 0 à 0,5 environ, ce qui représente une plage plus réduite que pour l'autre travée, la vitesse maximale atteinte étant sensiblement la même mais la longueur plus faible.
Ces divers essais sont résumés sur la planche 34.

La planche 35 montre l'influence des paramètres $K'$ et $\sqrt{K}$ sur les rapports $\Phi_{1/2}$ et $\Phi_{3/4}$ des contraintes dynamiques mesurées dûes à la surcharge* aux contraintes statiques mesurées dûes à la surcharge* dans les sections milieu et au trois quarts.
L'augmentation de $\Phi_{1/2}$ avec $K'$ et $\sqrt{K}$ est particulièrement nette.
Le tracé des courbes $\Phi_{3/4}$ montre que la section dans laquelle la contrainte dynamique dûe à la surcharge augmente le plus se déplace du milieu vers la droite de la travée lorsque $K'$ et $\sqrt{K}$ augmentent.

## 2.3 - COMPARAISON ENTRE RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

### 2.3.1 - COMPARAISON ENTRE CALCUL NUMERIQUE ET ESSAIS SUR MODELE

Pour les diverses valeurs du rapport $K'$ le calcul du coefficient de majoration $k_m$ a été fait en donnant chaque fois au deuxième paramètre sans dimension $\sqrt{K}$ une suite discrète de valeurs échelonnées entre 0 et 1, ce qui couvre la plage obtenue au cours des essais par variation de la vitesse du chariot.
Ce dernier exerce son action sur le chemin de roulement par l'intermédiaire de deux groupes d'essieux distants de 15 centimètres. Le rapport de cette distance à la portée de 3,80 mètres est suffisamment faible pour permettre d'assimiler dans le calcul les deux groupes d'essieux à un essieu unique (§ V 2.1.1) ; bien que le rapport soit voisin de 0,1 et donc également faible pour la travée de 1,80 mètres le calcul a cependant été fait dans ce cas en distinguant les deux groupes avec un maillage de 59 points** , de manière à vérifier la condition d'espacement minimal du § V 2.3.2.1.

* : *contrainte dûe au poids propre exclue*
** : *les résultats sont d'ailleurs très peu différents en assimilant les deux groupes d'essieux comme pour la travée de 3,80 mètres*

D'après le § V 2.3.3 le coefficient $k_m$ doit vérifier les inégalités :

$$\Phi_\mu \left[ 1 - \frac{\sigma_{pp}(\mu)}{\sigma_{stat}(\mu)} \right] \leq k_m \leq \Phi_\omega$$

$\sigma_{stat}$ est la contrainte statique totale (y compris contrainte dûe au poids propre ) $\sigma_{pp}$ est la contrainte statique dûe au poids propre.

$\Phi$ désigne le rapport de la contrainte dûe à la surcharge dynamique à la contrainte dûe à la surcharge statique.

$\mu$ et $\omega$ désignent les abscisses réduites $\frac{x}{\ell}$ des sections où se produisent respectivement les contraintes statiques et dynamiques maximales. Soit $d$ ($d < \ell$) la distance entre les essieux et $\xi$ l'abcisse réduite d'une section

$$\frac{\sigma_{pp}(\xi)}{\sigma_{stat}(\xi)} = \frac{\xi(1 - \xi)}{2\ K'\ \xi(1 - \xi - \frac{d}{2\ell}) + \xi\ (1 - \xi)}$$

dans la section $\mu$ , $\sigma_{stat}$ est maximal

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{K'}{1 + 2\ K'}\ (\frac{d}{2\ell})$$

or $\frac{d}{\ell} < 0{,}1$

par conséquent, avec une bonne approximation

$$\mu \approx \frac{1}{2}$$

et

$$\frac{\sigma_{pp}(\mu)}{\sigma_{stat}(\mu)} = \frac{1}{1 + 2\ K'}$$

dans les inégalités résultantes :

$$\Phi_{1/2} \left[ 1 - \frac{1}{1 + 2\ K'} \right] + \frac{1}{1 + 2\ K'} \leq k_m \qquad (2.3.1)$$

et

$$k_m \leq \Phi_\omega \qquad (2.3.2)$$

le terme $\Phi_{1/2} \left[ 1 - \frac{1}{1 + 2\ K'} \right] + \frac{1}{1 + 2\ K'}$ est donné par les mesures ; par contre la section $\omega$ ne correspond pas forcément à l'une des sections de

mesure et est d'ailleurs variable suivant les valeurs de $K'$ et $\sqrt{K}$. L'inégalité (2.3.2) peut cependant être remplacée par la condition

$$k_m \leq \text{Sup} \left( \Phi_{1/4} , \Phi_{1/2}, \Phi_{3/4} \right) \qquad (2.3.3)$$

qui, si elle est vérifiée, entraine à fortiori

$$k_m \leq \Phi_\omega$$

Les planches 36 à 42 représentent les coefficients $k_m$ calculés et les quantités

$$\Phi_{1/2} \left[ 1 - \frac{1}{1 + 2\,K'} \right] + \frac{1}{1 + 2\,K'}$$

et Sup $(\Phi_{1/4}, \Phi_{1/2}, \Phi_{3/4})$ données par les mesures en fonction de $\sqrt{K}$ pour les diverses valeurs étudiées.

L'inégalité (2.3.3) est toujours vérifiée.

L'inégalité (2.3.1) est bien vérifiée sauf pour les valeurs de $K'$ correspondant à la travée de 1,80 mètres. Ceci provient de l'impossibilité d'éliminer le jeu important apparu dans l'appui de gauche de cette travée. Dans les deux séries d'essais correspondant à la même valeur de $K'$ ($K' = 0{,}835$), les résultats présentent d'ailleurs une dispersion qui illustre bien l'influence parasite de ce défaut.

Les résultats de la comparaison entre calcul et expérience sont cependant satisfaisants dans l'ensemble.

Ils mettent en évidence l'augmentation de $\Phi_{1/2} \left[ 1 - \frac{1}{1 + 2\,K'} \right] + \frac{1}{1 + 2\,K'}$, et celle de $k_m$ avec $K'$ et $K$ ; naturellement les quantités Sup $[\Phi_{1/4} , \Phi_{1/2} , \Phi_{3/4}]$ augmentent également. Il faut d'autre part remarquer que le déplacement de la section dans laquelle se produit la valeur maximale du coefficient $\Phi$ (pl. 35) est à rapprocher des résultats du calcul (§ 2.1.1).

Par ailleurs les mesures de flèche peuvent être comparées avec les calculs. Ainsi la planche 43 donne, pour la série d'essais n° 4 sur la travée de 3,80 mètres (pl. 34), les lignes d'influence des flèches reduites $U$ sous surcharge* calculées au milieu et des flèches réelles sous

* : *sans prise en compte de la flèche statique dûe au poids propre*

surcharge* $u'_{1/2}$ mesurées au voisinage du milieu (pl. 33) pour $\sqrt{K}$ = 0,044 ; 0,296 ; 0,6 ; 0,814 ; 0,950, la valeur $\sqrt{K}$ = 0,044 représentant un essai quasi-statique. Le rapport K' de la masse de la surcharge roulante à celle de la travée est de 0,762.

On notera l'analogie entre les lignes d'influence calculées et mesurées. Elle est précisée sur la planche 44 qui représente l'évolution en fonction de $\sqrt{K}$ du rapport $\frac{(U)}{(U)_{\sqrt{K}=0,044}}\sqrt{K}$ calculé et $\frac{(u'_{1/2})}{(u'_{1/2})_{\sqrt{K}=0,044}}\sqrt{K}$ mesuré.

La correspondance est excellente, étant donné les erreurs de mesures et le fait que le déplacement $u'_{1/2}$ n'est pas mesuré exactement au milieu de la travée (pl. 33).

Rappelons enfin que, si T est la période fondamentale d'oscillation libre et t le temps de passage

$$\sqrt{K} = \frac{\pi}{2}\frac{T}{t}$$

Autrement dit, puisque dans tous les cas $\sqrt{K}$ est inférieur à 1 la période T est plus petite que le temps de passage ( T < 0,60 t )

Cependant le calcul et l'expérience montrent (pl. 43) que les oscillations à la période fondamentale T constituent un phénomène très secondaire car elles n'apparaissent guère, sauf peut-être pour $\sqrt{K}$ = 0,296. Ceci montre la nature particulière des effets dynamiques dûs aux charges roulantes par rapport aux vibrations libres. Naturellement, pour des valeurs plus faibles de K', on se rapprocherait du cas de la vibration libre et les oscillations à la période T seraient plus marquées.

## 2.3.2 - COMPARAISON ENTRE CALCUL NUMERIQUE ET ESSAIS EN VOIE

### 2.3.2.1 - SCHEMATISATION DES CONVOIS REELS

Elle porte principalement sur deux points : d'une part la distance minimale entre essieux voisins est limitée et d'autre part on ne prend en compte qu'un seul étage de suspension.

* : *sans prise en compte de la flèche statique dûe au poids*

La distance minimale entre essieux doit être supérieure ou égale à cinq intervalles élémentaires de l'axe des abscisses, d'après le § III 2.1. Si n est le nombre de points de subdivision, le pas sur l'axe des abscisses en variable réduite est

$$\delta\xi = \frac{1}{n+1} = \frac{\delta x}{\ell}$$

autrement dit le rapport de la distance minimale à la longueur totale $\ell$ de l'ouvrage doit être supérieur ou égal à $\frac{5}{n+1}$.

Or n ne peut raisonnablement pas augmenter beaucoup car ceci entraine un accroissement considérable du temps de calcul, sans pour autant que la précision s'en trouve améliorée (chapitre IV). En pratique n est limité à 69 points, la valeur optimale semblant cependant se situer entre 29 et 49, ce qui correspond à une distance minimale entre essieux supérieure à $0{,}1\ \ell$. Si la distance minimale est inférieure à $0{,}1\ \ell$ on peut selon le cas, soit augmenter n — ce qui conduit à une distance minimale de $\frac{5}{70}\ \ell$ pour n = 69 —, soit confondre en un seul essieu les essieux très rapprochés. Cette dernière possibilité est confirmée par le calcul au § V 2.1.

En ce qui concerne les suspensions, celles-ci doivent être identiques pour les divers bogies d'un même véhicule et ne doivent comporter qu'un seul étage. L'étage retenu est celui dont les ressorts sont les moins rigides. Les amortisseurs considérés sont de type visqueux.

Enfin l'inertie de rotation de la masse suspendue est calculée en supposant que celle-ci est constituée d'un solide homogène.

Les paramètres sans dimension caractéristiques d'un véhicule sont par conséquent $\underline{CR}$, $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{J}$, respectivement proportionnels à la rigidité CR des ressorts, à la viscance des amortisseurs et à l'inertie de rotation J de la masse suspendue.

### 2.3.2.2 - QUELQUES VALEURS NUMERIQUES CARACTERISTIQUES DES OUVRAGES REELS

On a reporté dans un tableau les caractéristiques mécaniques moyennes d'un certain nombre d'ouvrages réels ainsi que des grandeurs calculées à partir de ces caractéristiques (pl. 45).

Le paramètre sans dimension $\sqrt{K}$ fait partie des paramètres déterminant l'effet dynamique. Par ailleurs $\frac{\ell}{v}\sqrt{K}$, qui a la dimension d'un temps, est proportionnel à la période fondamentale T d'une travée isostatique de portée $\ell$ :

$$\frac{\ell}{v}\sqrt{K} = \frac{\pi}{2} T$$

Enfin les quantités $\frac{\ell^3}{EI}$ et $\frac{\ell}{\sqrt{EI\rho S}}$, qui ne dépendenr que des caractéristiques de l'ouvrage permettent de calculer $\underline{CR}$ et $\underline{\varepsilon}$ .

Les courbes montrent qu'à l'exception de $\frac{\ell}{\sqrt{EI\rho S}}$ les diverses grandeurs calculées ont tendance à augmenter avec la portée. Ceci est particulièrement net pour $\frac{\ell}{v}\sqrt{K}$.
Naturellement la présence de types d'ouvrages différents et surtout de matériaux différents explique la dispersion des résultats.

2.3.2.3 - CARACTERISTIQUES DES VEHICULES REELS

Etant donné la schématisation choisie pour les véhicules les caractéristiques principales sont la rigidité CR des ressorts, la viscance $\varepsilon$ des amortisseurs et l'inertie de rotation J, dont on déduit ensuite $\underline{CR}$, $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{J}$

$$\underline{CR} = \left(\frac{CR}{\frac{MS}{\rho S\ell}}\right) \frac{\ell^3}{EI} \qquad \underline{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon}{\frac{MS}{\rho S\ell}}\right) \frac{\ell}{\sqrt{EI\rho S}} \qquad \underline{J} = \frac{J}{MS \times d^2}$$

MS est la masse suspendue du véhicule considérée d est la distance du centre de gravité de la masse suspendue à l'une des masses non-suspendues ; il y a autant de valeurs de $\underline{J}$ que de masses non suspendues pour le véhicule considéré.

Les deux premières formules montrent que $\underline{CR}$ et $\underline{\varepsilon}$ dépendent du véhicule par CR et $\varepsilon$, de l'ouvrage par $\frac{\ell^3}{EI}$ et $\frac{\ell}{\sqrt{EI\rho S}}$, mais également du rapport $\left(\frac{MS}{\rho S\ell}\right)$ lié à la fois au véhicule et à l'ouvrage .

Dans le cas d'un véhicule à $n_e$ essieux la fréquence f de la masse suspendue dans son mouvement vertical est :

$$f = \frac{\sqrt{4 \frac{n_e\, CR}{MS} - \left(\frac{n_e \varepsilon}{MS}\right)^2}}{4\pi}$$

si d'autre part on pose

$$t = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon)_{critique}} = \frac{n_e\, \varepsilon}{\sqrt{4\, n_e \cdot MS.CR}}$$

il vient

$$\underline{CR} = \frac{4\pi^2}{n_e(1 - t^2)} \left(f \frac{\ell}{v} \sqrt{K}\right)^2$$

et

$$\underline{\varepsilon} = 2 \sqrt{\frac{\underline{CR}}{n_e}}\ t$$

or la plupart des véhicules sont construits de manière à ce que la fréquence $f$ de l'étage le moins rigide soit voisine de 1 Herz, $t$ valant environ 0,2. En admettant que $f$ ne dépasse pas 2 à 3 Herz et en remarquant que $\frac{\ell}{v}\sqrt{K}$ demeure inférieur à 1 pour des portées allant jusqu'à 100 mètres on a pour un véhicule à 2 essieux

$$\underline{CR} < 20{,}56 \times 9 < 200$$

et

$$\underline{\varepsilon} = \sqrt{2\, \underline{CR}}\ t < 4$$

Revenons maintenant au paramètre sans dimension $\underline{J}$ associé à chaque masse non-suspendue du véhicule considéré. Si l'on admet que la masse suspendue constitue un solide homogène de masse MS, de hauteur $H$ et de longueur $L$

$$J = \frac{MS}{12} \left(L^2 + H^2\right)$$

en prenant $H = \frac{L}{6}$ et $d = \frac{L}{3}$ on obtient la valeur moyenne suivante

$$\underline{J} = \frac{37}{36} \times \frac{9}{12} \approx 1$$

2.3.2.4 - <u>COMPARAISON ENTRE LE CALCUL ET LES ESSAIS DU PONT D'ANGERVILLE (pl. 46 et 47)</u>

L'ouvrage est décrit dans le tableau du paragraphe 2.3.2.2.

Les convois qui le parcourent sont les rames TGV et RTG. Pour cette dernière les calculs ont été faits avec et sans prise en compte de la suspension, de manière à mettre en évidence l'influence favorable de celle-ci sur les contraintes dans l'ouvrage.

Les résultats des mesures effectuées au passage de la rame RTG confirment les résultats du calcul. Dans les graphiques figure en ordonnée le coefficient $\phi$ mesuré et calculé dans la section milieu de l'une des poutres métalliques du pont. Ce coefficient est le rapport de la différence entre les contraintes sous surcharges dynamiques et statiques à la contrainte statique due à la surcharge seule dans la section considérée. L'intérêt d'un tel coefficient est d'être directement accessible aux mesures extensométriques.

Les résultats d'une autre méthode de calcul, basée sur les théories d'Inglis-Fryba, sont figurés en pointillés.

### 2.3.3 - COMPARAISON ENTRE CALCUL NUMERIQUE ET FORMULES REGLEMENTAIRES

Ces formules sont d'origine empirique et donnent le rapport de l'augmentation de contrainte sous surcharge dynamique à l'augmentation de contrainte sous surcharge statique ; le coefficient ainsi obtenu vient majorer la part de contrainte due à la surcharge statique.

On peut distinguer deux types de formules :

— les plus anciennes (RAPPORT DE LA COMMISSION DE 1927 - ANNEXE N° 3) ne font pas intervenir la vitesse des convois. Le coefficient de majoration est donné sous forme de la somme

$$1 + \alpha + \beta = 1 + \frac{0,4}{1 + 0,2\,\ell} + \frac{0,6}{1 + 4\,\frac{P}{S}}$$

$\ell$ étant la longueur de la pièce et $\frac{P}{S}$ le rapport de la charge permanente qu'elle supporte à la surcharge $S$ qu'elle est exposée à supporter.
Le coefficient ainsi obtenu est compris entre 1 et 2 : pour une pièce très courte et très légère il peut atteindre 2, $\ell$ et $\frac{P}{S}$ étant négligeables,

mais pour une poutre de 100 mètres de portée il tombe à 1,14 si l'on suppose que $\frac{P}{S}$ vaut 1.

Dans l'esprit des membres de la commission il fallait assurer "en même temps qu'une sévérité relativement grande pour les pièces courtes et légères, une atténuation relativement rapide pour les pièces relativement importantes et lourdement chargées".

— les plus récentes, telles que la formule UIC (FICHE UIC 776 - 1 R DU 1.7.1974) donnent le coefficient de majoration dynamique $(1 + \phi')$ sous la forme suivante

$$(1 + \phi') = 1 + \frac{\frac{v}{2\ell f}}{1 - \frac{v}{2\ell f} + \left(\frac{v}{2\ell f}\right)^4}$$

$v$ étant la vitesse de la charge et $f$ la fréquence fondamentale de la poutre non chargée.

Ces formules ne font pas intervenir le rapport $\frac{P}{S}$ mais prennent en compte la vitesse.

Les résultats du calcul montrent qu'en réalité il faut tenir compte à la fois du paramètre sans dimension $\frac{P}{S}$ et du paramètre sans dimension $\frac{v}{2\ell f}$, ainsi qu'on va le voir à partir du cas très simple d'une masse unique non suspendue parcourant une travée isostatique.

Rappelons tout d'abord que dans le calcul on a choisi comme définition du coefficient de majoration dynamique le rapport $k_m$ de la contrainte dynamique totale (y compris contrainte due au poids propre) maximum à la contrainte statique totale maximum.

$$k_m = \frac{\left[\sigma_{dyn}\right]_{max}}{\left[\sigma_{stat}\right]_{max}} = \frac{\sigma_{dyn}(\omega)}{\sigma_{stat}(\mu)}$$

$\omega$ désigne la section où se produit la contrainte dynamique maximale et $\mu$ la section où se produit la contrainte statique maximale.

On vérifie immédiatement les inégalités

$$\frac{\sigma_{dyn}(\mu)}{\sigma_{stat}(\mu)} \leqslant k_m \leqslant \frac{\sigma_{dyn}(\omega)}{\sigma_{stat}(\omega)}$$

or

$$\sigma_{dyn} = \Phi \ (\sigma_{stat} - \sigma_{pp}) + \sigma_{pp}$$

$\sigma_{pp}$ contrainte due au poids propre

$\Phi$ désigne $(1 + \phi')$ ou $(1 + \alpha + \beta)$ selon la formule choisie

On en déduit

$$\Phi_\mu - \frac{\sigma_{pp}(\mu)}{\sigma_{stat}(\mu)} \ (\Phi_\mu - 1) \leqslant k_m \leqslant \Phi_\omega - \frac{\sigma_{pp}(\omega)}{\sigma_{stat}(\omega)} \ (\Phi_\omega - 1)$$

et par suite

$$\Phi_\mu - \frac{\sigma_{pp}(\mu)}{\sigma_{stat}(\mu)} \ (\Phi_\mu - 1) \leqslant k_m \leqslant \Phi_\omega$$

d'où

$$\Phi - \frac{\sigma_{pp}(\mu)}{\sigma_{stat}(\mu)} \ (\Phi - 1) \leqslant k_m \leqslant \Phi$$

puisque les formules règlementaires ne donnent pas des valeurs différentes à $\Phi$ selon la section

Pour une travée isostatique parcourue par une surcharge unique, $\mu$ est la section milieu et

$$\frac{\sigma_{pp}(\mu)}{\sigma_{stat}(\mu)} = \frac{P}{P + 2S}$$

On devra donc vérifier $\Phi - \frac{P}{P + 2S} (\Phi - 1) \leqslant k_m \leqslant \Phi$

On a représenté sur un même graphique (pl. 48) les courbes donnant $k_m$ calculée et $\Phi$ déduit des formules règlementaires en choisissant pour le règlement de 1927 les deux cas extrêmes de ponts de 6,26 mètres et de 90 mètres (§ V 2.3.2.2) supportant une surcharge de 100 tonnes. Quelle que soit la formule choisie on voit que la deuxième inégalité $k_m \leqslant \Phi$ n'est plus vérifiée si $\frac{P}{S}$ diminue ou si $\frac{v}{2\ell f}$ augmente.

## VI - CONCLUSION

D'un point de vue purement théorique, l'étude générale de la résolution du problème traité est délicate ; les questions d'existence et d'unicité ne peuvent par exemple être abordées qu'au moyen des outils de l'analyse fonctionnelle, comme le montrent les publications sur le sujet.

La méthode numérique mise au point permet cependant la solution du problème, tant en ce qui concerne le mouvement de l'ouvrage que celui des véhicules le parcourant ; les valeurs trouvées pour les contraintes dynamiques sont confirmées par des essais sur modèle réduit et par des essais en voie avec des convois réels. Par ailleurs les résultats sont les mêmes que ceux que l'on obtient au moyen d'une autre formulation numérique que l'on a développé dans un but de vérification.

Dans la mise en équation les termes correspondant aux accélérations verticales des masses roulantes sont pris en compte ; ces termes sont importants car ils modifient les forces exercées sur l'ouvrage. L'amortissement de l'ouvrage qui est de toute façon un facteur favorable est par contre négligé.

Le coefficient de majoration dynamique, tel qu'on l'a défini, n'est pas accessible directement à la mesure puisqu'il fait intervenir les contraintes sous poids propre. Il semble pourtant difficile de choisir une définition différente car, du point de vue constructif, c'est la contrainte totale qui est déterminante pour le choix des sections d'ouvrage. Remarquons d'autre part que si les oscillations de la contrainte autour de la valeur moyenne statique doivent être pris en compte, par exemple, pour estimer les risques de fissuration à la fatigue, il conviendrait d'étudier dans chaque section de la poutre, les variations de la contrainte maximale dynamique totale par rapport à sa valeur statique dans cette section en l'absence de charge roulante. Or si l'on admet la condition de Von Mises, qui est manifestement

plus sévère que la condition réelle pour la résistance à la fatigue, c'est la valeur maximale de la contrainte dynamique totale qui, dans chaque section, doit rester inférieure à la limite de fatigue de traction-compression et cette valeur maximale est précisément le numérateur de la fraction qui représente le coefficient de majoration tel qu'il a été défini dans ce mémoire.
Pour ce coefficient, les comparaisons faites avec les formules règlementaires existantes montrent les imperfections de celles-ci dans le cas de charge élémentaire constitué par une masse unique non suspendue.

Dans les cas de charge plus complexes correspondant aux véhicules réels une certaine schématisation des convois est nécessaire : on n'a par exemple considéré qu'un seul étage de suspension, le poids du bogie étant soit ajouté à celui de la caisse, soit ajouté à celui des essieux, cette dernière possibilité étant dans le sens de la sécurité.
La mise en équation complète, sans hypothèses simplificatrices, du mouvement du véhicule est d'ailleurs illusoire étant donné la difficulté d'évaluation correcte des divers paramètres mécaniques mis en jeu.

Les effets dynamiques dépendent non seulement des charges roulantes et de leur espacement mais aussi de manière fondamentale de leur suspension. C'est pourquoi il serait peut-être intéressant de dresser une liste de convois-types pour lesquels on préciserait aussi les suspensions, les inerties de rotation des caisses et les valeurs des masses suspendues et non suspendues, ceci afin d'établir des abaques couvrant les cas usuels.

# B I B L I O G R A P H I E


1 - H. ZIMMERMANN :

"Die Schwingugen eines Trägers mit bewegter Last"
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1896.

2 - S. TIMOSHENKO :

"Théorie des vibrations"
Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1954, p. 357-373.

3 - C.E. INGLIS :

"A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges"
Cambridge University Press, 1934.

4 - L. FRYBA :

"Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads, ch. 8, 9, 10.
Noordhoff International Publishing.

5 - J. COUVERT :

"Etude des Phénomènes de Majoration Dynamique sur les Ponts Rails"
Travail de Fin d'Etude, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées,
Juin 1972.

6 - J.B. KAMMERER :

Comptes Rendus, 279, Série A, 1974, p. 895.

7 - J.B. KAMMERER :

Comptes Rendus, 280, Série B, 1975, p. 785.

8 - J.B. KAMMERER :

Comptes Rendus, (en préparation)

9 - MINISTERE DE L'EQUIPEMENT :

"Annexe n° 3 à la circulaire du 10 mai 1927"

10 - OFFICE DE RECHERCHES ET D'ESSAIS DE L'UNIONS INTERNATIONALE DES CHEMINS DE FER :

"Fiche UIC 776 - 1 R du 1.7.1974"

11 - L. COLLATZ :

"Numerische Behandlung von Differentialgleichungen"
Springer Verlag OHG, Berlin - Göttingen - Heidelberg (1951)

12 - G. HACQUES :

"Mathématiques pour l'informatique 3) Algorithmique numérique (I)"
Collection U, Armand Colin (1971)

13 - OFFICE DE RECHERCHES ET D'ESSAIS DE L'UNION INTERNATIONALE DES CHEMINS DE FER

- Comité d'Experts D 23 : "Rapport D 23/RP 13 : Essais sur modèle et comparaison avec les résultats obtenus sur le pont d'Oerlikon" (Novembre 1967)

14 - L. GIRARDI et A. KAMMERER :

Comptes Rendus, 280, Série A, 1975, p. 1153

15 - C.C. SMITH, A.J. GILCHRIST et D.N. WORMLEY :

"Multiple and Continuous Span Elevated Guideway Dynamic Performance" - Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and control (March 1975)

16 - CAIRONI (M.) :

[ Ist. Sci. Tec. Costruz. Fac. Ingener. Politec. Milano, Ital. ]

"Dinamica della Trave appogiata e continua solto carichi viaggianti"
Costr. Cemento armato, Ital. (1970), n° 7, pp. 53 - 115.

- Vibrations

E.G. GOLOSKOKOW, A.P. FILIPPOW :

"Instationäre Schwingungen mechanischer Systeme"
Akademie Verlag - Berlin (1971)

- Analyse numérique

J.L. LIONS :

"Cours d'Analyse Numérique de l'Ecole Polytechnique"
Hermann

RICHTMYER - MORTON :

"Finite Difference Methods for Partial Differential Equations"
New-York (1965)

VARGA :

"Matrix Iterative Analysis"
Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1962

P. HENRICI :

"Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations"
John Wiley (1962)

P. HENRICI :

"Error Propagation for Difference Methods"
John Wiley (1963)

ORTEGA (James) :

"Numerical Analysis"
Academic Press, New-York (1972)

# ANNEXES 1,2,3,4

## DISCRETISATION SUR $\xi$

Afin de ne pas alourdir les écritures les dérivées $\frac{\partial^m f}{\partial \xi^m}$ seront notées $\partial^m f$ .

Pour l'établissement des formules on fera un usage constant des relations suivantes :

$$U_{i+5,j} = U_{i,j} + 5\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(5\delta\xi)^2}{2}\,\partial^2 U_{i,j} + \frac{(5\delta\xi)^3}{6}\,\partial^3 U^+_{i,j} + \frac{(5\delta\xi)^4}{24}\,\partial^4 U^+_{i,j}$$
$$+ \frac{(5\delta\xi)^5}{120}\,\partial^5 U^+_{i,j} + \frac{(5\delta\xi)^6}{720}\,\partial^6 U^+ (\xi_i + 5\theta_{i+5}\delta\xi, \tau_j) \qquad (1)$$

$$U_{i+4,j} = U_{i,j} + 4\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(4\delta\xi)^2}{2}\,\partial^2 U_{i,j} + \frac{(4\delta\xi)^3}{6}\,\partial^3 U^+_{i,j} + \frac{(4\delta\xi)^4}{24}\,\partial^4 U^+_{i,j}$$
$$+ \frac{(4\delta\xi)^5}{120}\,\partial^5 U^+_{i,j} + \frac{(4\delta\xi)^6}{720}\,\partial^5 U^+ (\xi_i + 4\theta_{i+4}\delta\xi, \tau_j) \qquad (2)$$

$$U_{i+3,j} = U_{i,j} + 3\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(3\delta\xi)^2}{2}\,\partial^2 U_{i,j} + \frac{(3\delta\xi)^3}{6}\,\partial^3 U^+_{i,j} + \frac{(3\delta\xi)^4}{24}\,\partial^4 U^+_{i,j}$$
$$+ \frac{(3\delta\xi)^5}{120}\,\partial^5 U^+_{i,j} + \frac{(3\delta\xi)^6}{720}\,\partial^5 U^+ (\xi_i + 3\theta_{i+3}\delta\xi, \tau_j) \qquad (3)$$

$$U_{i+2,j} = U_{i,j} + 2\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(2\delta\xi)^2}{2}\,\partial^2 U_{i,j} + \frac{(2\delta\xi)^3}{6}\,\partial^3 U^+_{i,j} + \frac{(2\delta\xi)^4}{24}\,\partial^4 U^+_{i,j}$$
$$+ \frac{(2\delta\xi)^5}{120}\,\partial^5 U^+_{i,j} + \frac{(2\delta\xi)^6}{720}\,\partial^6 U^+ (\xi_i + 2\theta_{i+2}\delta\xi, \tau_j) \qquad (4)$$

$$U_{i+1,j} = U_{i,j} + \delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^2}{2}\,\partial^2 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^3}{6}\,\partial^3 U^+_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^4}{24}\,\partial^4 U^+_{i,j}$$
$$+ \frac{(\delta\xi)^5}{120}\,\partial^5 U^+_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^6}{720}\,\partial^6 U^+ (\xi_i + \theta_{i+1}\delta\xi, \tau_j) \qquad (5)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$U_{i-5,j} = U_{i,j} - 5\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(5\delta\xi)^2}{2}\partial^2 U_{i,j} - \frac{(5\delta\xi)^3}{6}\,\partial^3 U^-_{i,j} + \frac{(5\delta\xi)^4}{24}\,\partial^4 U^-_{i,j}$$

$$- \frac{(5\delta\xi)^5}{120}\,\partial^5 U^-_{i,j} + \frac{(5\delta\xi)^6}{720}\,\partial^6 U^-\,(\xi_i - 5\theta_{i-5}\delta\xi\ ,\ \tau_j) \qquad (10)$$

les noeuds $( i \pm k, j)$ $1 \leqslant k \leqslant 5$ se situent dans le même sous- domaine que le noeud $(i,j)$ ; de plus

$$0 < \theta_{i \pm k} < 1$$

Les résultats du § II 1.2 fourniront dans certains cas des relations supplémentaires.

# ANNEXE 1 : DERIVEES SECONDE $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$

## 1) - FORMULE GENERALE (2.2.1.1) : $i \neq [1 ; j - (j_o)_{im} \pm 1 ; n]$

Les relations (5) et (6) donnent par addition membre à membre

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} = 2 U_{i,j} + (\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i,j} + \frac{2(\delta\xi)^4}{24} \partial^4 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^7}{720} \left[ \partial^6 U (\xi_i + \theta_{i+1}\delta\xi, \tau_j) + \partial^6 U (\xi_i - \theta_{i-1}\delta\xi , \tau_j) \right]$$

de même, en additionnant (4) et (7)

$$U_{i+2,j} + U_{i-2,j} = 2 U_{i,j} + (2\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i,j} + 2 \frac{(2\delta\xi)^4}{24} \partial^4 U_{i,j} + \frac{(2\delta\xi)^7}{720} \left[ \partial^6 U (\xi_i + 2\theta_{i+2}\delta\xi , \tau_j) + \partial^6 U (\xi_i - 2\theta_{i-2}\delta\xi, \tau_j) \right]$$

l'élimination de $\partial^4 U_{i,j}$ conduit à (2.2.1.1)

$$(\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i,j} = - \frac{1}{12} \left[ U_{i-2,j} - 16 U_{i-1,j} + 30 U_{i,j} - 16 U_{i+1,j} + U_{i+2,j} \right] + 0 (\delta\xi^7)$$

## 2) - POINTS SITUES AU VOISINAGE DES FRONTIERES $\xi = 0$, $\xi = 1$ ou $\xi = \sqrt{K} [\tau - (\tau_o)_{im}]$ (2.2.1.2)

Ce sont les noeuds (i,j) pour lesquels

$$i = [1 ; j - (j_o)_{im} \pm 1 ; n]$$

d'après la première équation du paragraphe précédent

les termes en $(\delta\xi)^5\ \Delta\partial^3 U_{i,j}$ provient des termes en $(\delta\xi)^5\ \Delta\partial^5 U_{i,j}$ d'après les relation du § II 1.2

b ) - i = 2 ou (n-1) (2.2.1.4)

On élimine seulement $\left[\partial^4 U^-_{i,j} + \partial^4 U^+_{i,j}\right]$ entre les deux premières relations du a) , en exprimant toujours $\Delta\partial^5 U_{i,j}$ en fonction de $\Delta\partial^3 U_{i,j}$ (§ II 1.2)

$$(\delta\xi)^2\ \partial^2 U_{i,j} = \frac{1}{12}\left\{ - U_{i-2,j} + 16\,U_{i-1,j} - 30\,U_{i,j} + 16\,U_{i+1,j} - U_{i+2,j} + \left[ -\frac{8}{6} + \frac{16(\delta\xi)^2}{120}\ \frac{1}{\underline{\dot{I}}_i}\left( \frac{6}{\underline{I}_i}\ (\partial \underline{\dot{I}}_i)^2 - 3\partial^2 \underline{\dot{I}}_i - \underline{\delta}_i\ K \right) \right] (\delta\xi)^3\ \Delta\partial^3 U_{i,j} + 0\,(\delta\xi)^6 \right\}$$

c ) - i = 1 ou n (2.2.1.5)

Supposons d'abord i = 1 et considérons les équations (6), (5), (4) et (3)

$$(A)\ U_{i-1,j} = U_{i,j} - \delta\xi\ \partial U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^2}{2}\partial^2 U_{i,j} - \frac{(\delta\xi)^3}{6}\ \partial^3 U^-_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^4}{24}\partial^4 U^-_{i,j} - \frac{(\delta\xi)^5}{120}\ \partial^5 U^-_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^6}{720}\ \partial^6 U^-\ (\xi_i - \theta_{i-1}\delta\xi\ ,\ \tau_j)$$

$$(B)\ U_{i+1,j} = U_{i,j} + \delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^2}{2}\partial^2 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^3}{6}\ \left[\partial^3 U^-_{i,j} + \Delta\partial^3 U_{i,j}\right] + \frac{(\delta\xi)^4}{24}\left[\partial^4 U^-_{i,j} + \Delta\partial^4 U_{i,j}\right] + \frac{(\delta\xi)^5}{120}\ \left[\partial^5 U^-_{i,j} + \Delta\partial^5 U_{i,j}\right] + \frac{(\delta\xi)^6}{720}\partial^6 U^-(\xi_i + \theta_{i+1}\delta\xi\ ,\ \tau_j)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(D)\ U_{i+3,j} = U_{i,j} + 3\ \delta\xi\ \partial U_{i,j} + \frac{(3\delta\xi)^2}{2}\ \partial^2 U_{i,j} + \cdots\cdots\cdots + \frac{(3\delta\xi)^6}{720}\ \partial^6 U^+(\xi_i + 3\theta_{i+3}\delta\xi\ ,\ \tau_j)$$

auxquelles on adjoint la relation

$$(E)\ (\delta\xi)^2\partial^2 U_{i-1,j} = (\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j} - (\delta\xi)^3\partial^3 U^-_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^4}{2}\partial^4 U^-_{i,j}$$
$$- \frac{(\delta\xi)^5}{6}\partial^5 U^-_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^6}{24}\partial^6 U^-(\xi_i - \theta^2_{i-1}\delta\xi\ ,\ \tau_j)$$

multiplions ces équations par A, B, C, D, E et combinons les des façon à éliminer les termes $\partial U_{i,j}$ , $\partial^3 U^-_{i,j}$ , $\partial^4 U^-_{i,j}$ et $\partial^5 U^-_{i,j}$ . On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} A - B + 2C + 3D = 0 \\ \frac{A}{6} - \frac{B}{6} + \frac{8C}{6} + \frac{27D}{6} - E = 0 \\ \frac{A}{24} + \frac{B}{24} + \frac{16C}{24} + \frac{81D}{24} + \frac{E}{2} = 0 \\ \frac{A}{120} - \frac{B}{120} + \frac{32C}{120} + \frac{243D}{120} - \frac{E}{6} = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$A = -\frac{174}{12}E \qquad B = -\frac{145}{12}E \qquad C = \frac{4E}{3} \qquad D = -\frac{E}{12}$$

de sorte que, pour $i = 1$ et $n$

$$(\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j} = -\frac{12}{120}(\delta\xi)^2\partial^2 U_{i\mp1,j} + \frac{145}{120}U_{i\mp1,j} - \frac{304}{120}U_{i,j}$$
$$+ \frac{174}{120}U_{i\pm1,j} - \frac{16}{120}U_{i\pm2,j} + \frac{1}{120}U_{i\pm3,j}$$
$$+\left[ -\frac{73}{120\times6} \mp \frac{\delta\xi}{120\times24} \times \frac{2}{\underline{I}_i}\partial\dot{\underline{I}}_i + \frac{2(\delta\xi)^2}{120\,\underline{I}_i}\left( \frac{6}{\underline{I}_i}(\partial\underline{I}_i)^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. 3\,\partial^2\underline{I}_i - \underline{\delta}_i K \right)\right](\delta\xi)^3\Delta\partial^3 U_{i,j} + O(\delta\xi^6)$$

$\partial^2 U_{i\mp1,j}$ étant nul, d'après les conditions aux limites

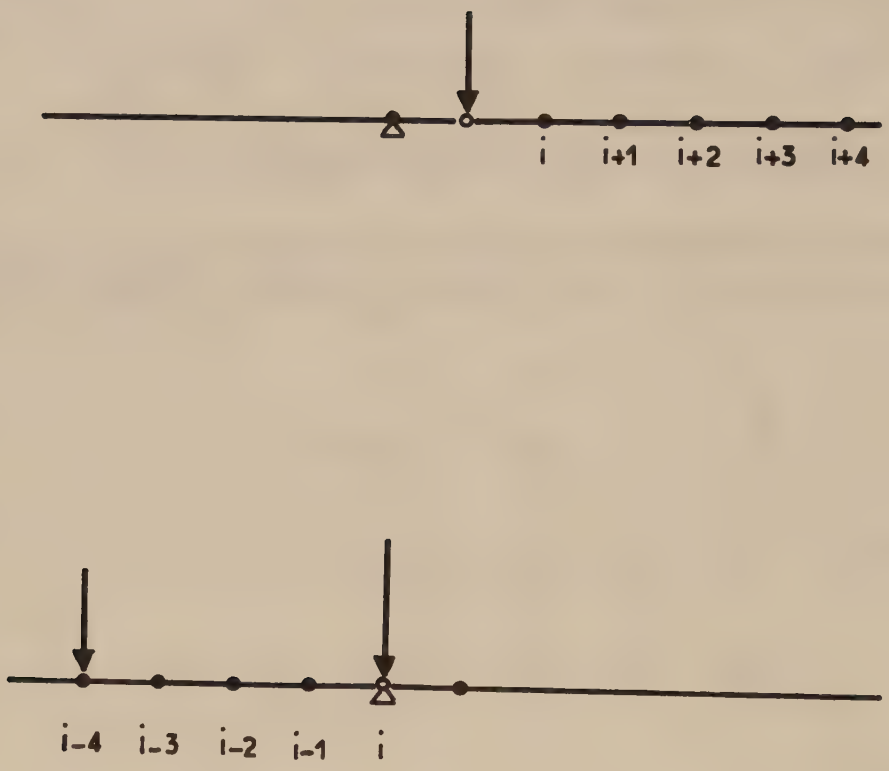



fig.1

d ) - Cas des noeuds voisins des appuis intermédiaires et situés sur une frontière $\xi = \sqrt{K}\,[\tau - (\tau_o)_{im}]$ (2.2.1.6) et (2.2.1.7)

La formule (2.2.1.5) ne s'applique pas car les dérivées seconde ne sont pas données au droit d'un appui intermédiaire ou d'une frontière $\xi = \sqrt{K}\,[\tau - (\tau_o)_{im}]$ (fig.1)

On peut cependant écrire la dérivée seconde $\partial^2 U_{i,j}$ en utilisant les valeurs de $U$ d'un seul coté du noeud $(i,j)$. Le deuxième cas de figure montre que la proximité de deux charges successives peut limiter le nombre de noeuds utilisables à 4. En utilisant ainsi les relations (2), (3), (4), (5) ou (6), (7), (8), (9) l'élimination des dérivées troisième et quatrième conduit à l'approximation d'ordre cinq

$$(\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i,j} = \frac{35}{12} U_{i,j} - \frac{104}{12} U_{i \pm 1,j} + \frac{114}{12} U_{i \pm 2,j}$$

$$- \frac{56}{12} U_{i \pm 3,j} + \frac{11}{12} U_{i \pm 4,j} \mp \frac{(\delta\xi)^5}{120 \times 12} \Big[ - 104\, \partial^5 U^{\pm}(\xi_i \pm \theta_{i \pm 1}\delta\xi\,,\, \tau_j)$$

$$+ (2)^5 \times 114\, \partial^5 U^{\pm}(\xi_i \pm 2\theta_{i \pm 2}\delta\xi\,,\, \tau_j) - (3)^5 \times 56\, \partial^5 U^{\pm}(\xi_i \pm 3\theta_{i \pm 3}\delta\xi,\, \tau_j)$$

$$+ (4)^5 \times 11\, \partial^5 U^{\pm}(\xi_i \pm 4\theta_{i \pm 4}\delta\xi\,,\, \tau_j) \Big]$$

## ANNEXE 2 : DERIVEES TROISIEME $\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$

### 1) - FORMULE GENERALE (2.2.2.1) : $i \neq [1 ; 2 ; j - (j_o)_{im} - 2 ; j - (j_o)_{im} - 1 ; j - (j_o)_{im} + 1 ; j - (j_o)_{im} + 2 ; n - 1 ; n]$

Considérons les relations suivantes :

$$(A)\quad U_{i+3,j} - U_{i-3,j} = 6\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + 2\,\frac{(3\delta\xi)^3}{6}\partial^3 U_{i,j} + 2\,\frac{(3\delta\xi)^5}{120}\partial^5 U_i + \frac{(3\delta\xi)^7}{7\,!}\left[\partial^7 U(\xi_i + 3\theta_{i+3}\delta\xi\ ,\ \tau_j) + \partial^7 U(\xi_i - 3\theta_{i-3}\delta\xi\ ,\ \tau_j)\right]$$

$$(B)\quad U_{i+2,j} - U_{i-2,j} = 4\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + 2\,\frac{(2\delta\xi)^3}{6}\partial^3 U_{i,j} + 2\,\frac{(2\delta\xi)^5}{120}\partial^5 U_{i,j} + \frac{(2\delta\xi)^7}{7\,!}\left[\partial^7 U(\xi_i + 2\theta_{i+2}\delta\xi\ ,\ \tau_j) + \partial^7 U(\xi_i - 2\theta_{i-2}\delta\xi\ ,\ \tau_j)\right]$$

$$(C)\quad U_{i+1,j} - U_{i-1,j} = 2\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + 2\,\frac{(\delta\xi)^3}{6}\partial^3 U_{i,j} + 2\,\frac{(\delta\xi)^5}{120}\partial^5 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^7}{7!}\left[\partial^7 U(\xi_i + \theta_{i+1}\delta\xi\ ,\ \tau_j) + \partial^7 U(\xi_i - \theta_{i-1}\delta\xi\ ,\ \tau_j)\right]$$

l'élimination des termes $\partial U_{i,j}$ et $\partial^5 U_{i,j}$ conduit au système

$$\begin{cases} 2A + 4B + 6C = 0 \\ 2A + (2)^6 B + 2 \times (3)^5 C = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$A = 13\,C \qquad B = -8\,C$$

par suite

$$(\delta\xi)^3\,\partial^3 U_{i,j} = -\frac{1}{8}\left[-U_{i-3,j} + 8\,U_{i-2,j} - 13\,U_{i-1,j} + 13\,U_{i+1,j} - 8\,U_{i+2,j} + U_{i+3,j}\right] + O(\delta\xi^7)$$

2) - FORMULE (2.2.2.2) : $i \neq [1 ; j - (j_o)_{im} - 1 ; j - (j_o)_{im} + 1 ; n]$

Des expressions de $(U_{i+2,j} - U_{i-2,j})$ et $(U_{i+1,j} - U_{i-1,j})$ établies au paragraphe précédent on tire :

$$U_{i+2,j} - U_{i-2,j} - 2(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) = 2(\delta\xi)^3 \partial^3 U_{i,j}$$

$$+ \frac{(\delta\xi)^5}{120} \left[ (2)^6 \partial^5 U_{i,j} - (2)^2 \partial^5 U_{i,j} \right] + 0(\delta\xi^7)$$

remplaçons $\partial^5 U_{i,j}$ par son expression (§ II 1.2)

$$(\delta\xi)^3 \partial^3 U_{i,j} = \frac{1}{2 + \frac{(\delta\xi)^2}{2 \dot{\underline{I}}_i} \left[ \frac{6}{\dot{\underline{I}}_i} (\partial \dot{\underline{I}}_i)^2 - 3 \partial^2 \dot{\underline{I}}_i - \underline{\delta}_i K \right]}$$

$$\Big\{ - U_{i-2,j} + 2 U_{i-1,j} - 2 U_{i+1,j} + U_{i+2,j}$$

$$- \frac{(\delta\xi)^3}{2 \dot{\underline{I}}_i} \left[ \frac{3}{\dot{\underline{I}}_i} \partial \dot{\underline{I}}_i \partial^2 \dot{\underline{I}}_i - \partial^3 \dot{\underline{I}}_i \right] (\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i,j}$$

$$- \frac{(\delta\xi)^3}{2 \dot{\underline{I}}_i} \left[ \frac{3 \underline{\delta}_i}{\dot{\underline{I}}_i} \partial \dot{\underline{I}}_i - \partial \underline{\delta}_i \right] (\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2}$$

$$- \frac{(\delta\xi)^5}{2 \dot{\underline{I}}_i} \left[ - \frac{3 \underline{\delta}_i}{\dot{\underline{I}}_i} \partial \dot{\underline{I}}_i + \partial \underline{\delta}_i \right] \frac{48}{K'} + 0(\delta\xi^7) \Big\}$$

3) - FORMULES PARTICULIERES AU VOISINAGE DES FRONTIERES $\xi = \sqrt{K} [\tau - (\tau_o)_{im}]$ et $\xi = 0$ ou 1

Trois cas sont à envisager selon que le noeud (i,j) considéré est voisin à la fois d'une frontière $\xi = \sqrt{K} [\tau - (\tau_o)_{im}]$ et $\xi = o$ ou 1.

a) - POINTS VOISINS SIMULTANEMENT D'UNE FRONTIERE $\xi = \sqrt{K} [\tau - (\tau_o)_{im}]$ et $\xi = 0$ ou 1 : $i = [1 ; n]$ (2.2.2.3), (2.2.2.7) et (2.2.2.8)

L'élimination des termes $\partial U_{i,j}$ et $\partial^2 U_{i,j}$ se fait entre l'équation

$$(A)\quad (\delta\xi)^2\partial^2 U_{i-1,j} = (\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j} - (\delta\xi)^3\partial^3 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^4}{2}\partial^4 U_{i,j}$$
$$- \frac{(\delta\xi)^5}{6}\partial^5 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^6}{24}\partial^6 U(\xi_i - \theta_{i-1}^2\delta\xi\ ,\ \tau_j)$$

et (5), (6), multipliées respectivement par B et C. Les coefficients A, B, C sont solution du système

$$\left|\begin{array}{rcl} B - C & = & 0 \\ A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} & = & 0 \end{array}\right.$$

soit : $A = -C \qquad B = C$

En exprimant d'autre part $\partial^4 U_{i,j}$ et $\partial^5 U_{i,j}$ en fonction des dérivées troisième et seconde, il vient pour $i = [\,1\ ;\ n\,]$

$$(\delta\xi)^3\partial^3 U_{i,j} = \frac{\pm 1}{1 \pm \frac{10\delta\xi}{12\,\underline{\dot{I}}_i}\partial\underline{\dot{I}}_i + \frac{(\delta\xi)^2}{6\,\underline{\dot{I}}_i}\left[\frac{6}{\underline{\dot{I}}_i}(\partial\underline{\dot{I}}_i)^2 - 3\,\partial^2\underline{\dot{I}}_i - \underline{\delta}_i K\right]}$$

$$\Big\{ - (\delta\xi)^2\partial^2 U_{i \mp 1,j} + U_{i-1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i+1,j}$$

$$- \left[\frac{5}{12}\,\frac{(\delta\xi)^2}{\underline{\dot{I}}_i}\partial^2\underline{\dot{I}}_i \pm \frac{1}{6}\,\frac{(\delta\xi)^3}{\underline{\dot{I}}_i}\left(\frac{3}{\underline{\dot{I}}_i}\,\partial\underline{\dot{I}}_i\partial^2\underline{\dot{I}}_i - \partial^3\underline{\dot{I}}_i\right)\right](\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j}$$

$$- \left[\frac{5}{12}\,\frac{\underline{\delta}_i(\delta\xi)^2}{\underline{\dot{I}}_i} \pm \frac{1}{6}\,\frac{(\delta\xi)^3}{\underline{\dot{I}}_i}\left(\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{\dot{I}}_i}\,\partial\underline{\dot{I}}_i - \partial\underline{\delta}_i\right)\right](\delta\xi)^2\,\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial\tau^2}$$

$$- \left[-\frac{5}{12}(\delta\xi)^4\,\frac{48\,\underline{\delta}_i}{\underline{\dot{I}}_i K'} \pm \frac{1}{6}\,\frac{(\delta\xi)^5}{\underline{\dot{I}}_i}\left(-\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{\dot{I}}_i}\,\partial\underline{\dot{I}}_i + \partial\underline{\delta}_i\right)\frac{48}{K'}\right] + O\,(\delta\xi^6)\Big\}$$

cette formule est également appliquée pour $i = [\,1\ ;\ n\,]$, même si $i \neq j - (j_o)_{im} \pm 1$

b) - POINTS VOISINS SIMULTANEMENT D'UNE FRONTIERE $\xi = \sqrt{K}\,[\tau - (\tau_o)_{im}]$ et $\xi = o$ ou $1$ : $[i = 2 ; (n-1)]$ (2.2.2.4) et (2.2.2.6)

Supposant $i = j - (j_o)_{im} - 1 = 2$ et à partir de l'équation

$$(A)\quad (\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i-2,j} = (\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i,j} - 2(\delta\xi)^3\, \partial^3 U_{i,j} + \frac{4(\delta\xi)^4}{2}\, \partial^4 U_{i,j} - \frac{8(\delta\xi)^5}{6}\, \partial^5 U_{i,j} + \frac{16(\delta\xi)^6}{24}\, \partial^6 U(\xi_i - 2\theta^2_{i-2}\delta\xi\ ,\ \tau_j)$$

que l'on multiplie par A
et des équations (5), (6) et (7) que l'on multiplie par B, C et D, on aboutit au système suivant pour l'élimination des termes $\partial U_{i,j}$, $\partial^2 U_{i,j}$ et $\partial^4 U_{i,j}$

$$\left|\begin{array}{rcl} B - C - 2D & = & 0 \\ A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} + 2D & = & 0 \\ 2A + \frac{B}{24} + \frac{C}{24} + \frac{16D}{24} & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $A = -\frac{6}{23} D$ $\qquad B = -\frac{17}{23} D$ $\qquad C = -\frac{63}{23} D$

en tenant compte de (1.2.2) II pour l'expression de $\partial^5 U_{i,j}$ et en regroupant les cas $i = j - (j_o)_{im} - 1 = 2$ et $i = j - (j_o)_{im} + 1 = (n-1)$ il vient

$$(\delta\xi)^3 \partial^3 U_{i,j} = \frac{1}{\frac{11}{23} - \frac{9(\delta\xi)^2}{92\,\dot{\underline{I}}_i}\left[\frac{6}{\dot{\underline{I}}_i}(\partial\dot{\underline{I}}_i)^2 - 3\partial^2\dot{\underline{I}}_i - \underline{\delta}_i K\right]}$$

$$\left\{ \pm\frac{6}{23}(\delta\xi)^2\partial^2 U_{i\mp2,j} \mp U_{i\mp2,j} \pm U_{i\mp1,j} \mp \frac{57}{23} U_{i,j} \pm \frac{17}{23} U_{i\pm1,j} + \frac{9(\delta\xi)^3}{92\,\dot{\underline{I}}_i}\left[\frac{3}{\dot{\underline{I}}_i}\,\partial\dot{\underline{I}}_i\,\partial^2\dot{\underline{I}}_i - \partial^3\dot{\underline{I}}_i\right](\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j} + \frac{9(\delta\xi)^3}{92\,\dot{\underline{I}}_i}\left[\frac{3\,\underline{\delta}_i}{\dot{\underline{I}}_i}\,\partial\dot{\underline{I}}_i - \partial\underline{\delta}_i\right](\delta\xi)^2\,\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial\tau^2}$$

$$+ \frac{9(\delta\xi)^5}{92\,\underline{\dot{I}}_i}\left[-\frac{3\,\underline{\delta}_i}{\underline{\dot{I}}_i}\,\partial\underline{\dot{I}}_i + \partial\underline{\delta}_i\right]\frac{48}{K'} + 0\,(\delta\xi^6)\Bigg\}$$

c) - POINTS VOISINS D'UNE FRONTIERE $\xi = \sqrt{K}\,[\tau - (\tau_o)_{im}]$ :

$i \neq [1\ ;\ 2\ ;\ (n-1)\ ;\ n]$ (2.2.2.5)

Raisonnons pour fixer les idées dans le cas $i = j - (j_o)_{im} - 1$. A partir des équations (5), (6), (7) et (8) multipliées respectivement par A, B, C et D on obtient le système suivant pour éliminer les $\partial U_{i,j}$, $\partial^2 U_{i,j}$ et $\partial^4 U_{i,j}$

$$\left|\begin{array}{rcl} A - B - 2C - 3D &=& 0 \\ A + B + 4C + 9D &=& 0 \\ A + B + 16C + 81D &=& 0 \end{array}\right.$$

d'où l'on tire : $A = 3D \qquad B = 12D \qquad C = -6D$

en utilisant toujours (1.2.2) II pour exprimer $\partial^5 U_{i,j}$ on aboutit aux formules suivantes pour $i = j - (j_o)_{im} - 1$ et $i = j - (j_o)_{im} + 1$

$$(\delta\xi)^3\partial^3 U_{i,j} = \frac{1}{2 - \frac{(\delta\xi)^2}{2\,\underline{\dot{I}}_i}\left[\frac{6}{\underline{\dot{I}}_i}(\partial\underline{\dot{I}}_i)^2 - 3\,\partial^2\underline{\dot{I}}_i - \underline{\delta}_i K\right]}\Bigg\{ \pm U_{i\mp 3,j}$$

$$\mp 6\,U_{i\mp 2,j} \pm 12\,U_{i\mp 1,j} \mp 10\,U_{i,j} \pm 3\,U_{i\pm 1,j}$$

$$+ \frac{(\delta\xi)^3}{2\,\underline{\dot{I}}_i}\left[\frac{3}{\underline{\dot{I}}_i}\,\partial\underline{\dot{I}}_i\,\partial^2\underline{\dot{I}}_i - \partial^3\underline{\dot{I}}_i\right](\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^3}{2\,\underline{\dot{I}}_i}\left[\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{\dot{I}}_i}\,\partial\underline{\dot{I}}_i - \partial\underline{\delta}_i\right](\delta\xi)^2\,\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial\tau^2}$$

$$+ \frac{(\delta\xi)^5}{2\,\underline{\dot{I}}_i}\left[-\frac{3\,\underline{\delta}_i}{\underline{\dot{I}}_i}\,\partial\underline{\dot{I}}_i + \partial\underline{\delta}_i\right]\frac{48}{K'} + 0\,(\delta\xi^6)\Bigg\}$$

## ANNEXE 3 : DISCONTINUITE $\Delta \dfrac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3}$

### 1) - CALCUL DE $\dfrac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial \xi^3}$ DE PART ET D'AUTRE D'UNE DISCONTINUITE $\xi = \sqrt{k}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right]$

Suivant le nombre de points disponibles les formules diffèrent.

a) - FORMULE A 5 POINTS

Raisonnons sur $\partial^3 U^+_{i,j}$ ; on peut éliminer $\partial U_{i,j}$, $\partial^2 U_{i,j}$, $\partial^4 U^+_{i,j}$ et $\partial^5 U^+_{i,j}$ entre les cinq relations (1), ..., (5) multipliées respectivement par A, B, C, D, E

$$\left|\begin{array}{l} A + 2B + 3C + 4D + 5E = 0 \\ A + (2)^2 B + (3)^2 C + (4)^2 D + (5)^2 E = 0 \\ A + (2)^4 B + (3)^4 C + (4)^4 D + (5)^4 E = 0 \\ A + (2)^5 B + (3)^5 C + (4)^5 D + (5)^5 E = 0 \end{array}\right.$$

on en tire : $A = \dfrac{71}{7} E \qquad B = -\dfrac{118}{7} E \qquad C = 14\,E \qquad D = -\dfrac{41}{7} E$

et l'expression de $(\delta\xi)^3 \partial^3 U_{i,j}$

$$(\delta\xi)^3 \partial^3 U^{\pm}_{i,j} = \mp \frac{17}{4} U_{i,j} \pm \frac{71}{4} U_{i \pm 1,j} \mp \frac{118}{4} U_{i \pm 2,j} \pm \frac{98}{4} U_{i \pm 3,j} \mp \frac{41}{4} U_{i \pm 4,j} \pm \frac{7}{4} U_{i \pm 5,j} + 0\,(\delta\xi^6)$$

b) - FORMULE A 4 POINTS

Le procédé est le même qu'en a), les relations utilisables étant seulement (2), ..., (5). On ne peut donc pas éliminer comme en a) les dérivées $\partial^5 U_{i,j}$. Cependant (1.2.2) II permet d'écrire

$$(\delta\xi)^3 \partial^3 U^{\pm}_{i,j} = \frac{1}{1 + \frac{21(\delta\xi)^2}{12\,\dot{I}_i}\left[\frac{6}{\dot{I}_i}(\partial\dot{I}_i)^2 - 3\partial^2\dot{I}_i - \delta_i K\right]}$$

$$\left\{ \mp \frac{3}{2} U_{i\pm 4,j} \pm 7 U_{i\pm 3,j} \mp 12 U_{i\pm 2,j} \pm 9 U_{i\pm 3,j} \mp \frac{5}{2} U_{i,j} \right.$$

$$- \frac{21}{12} \frac{(\delta\xi)^3}{\dot{I}_i} \left(\frac{3}{\dot{I}_i} \partial\dot{I}_i \partial^2\dot{I}_i - \partial^3\dot{I}_i\right) (\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i,j}$$

$$- \frac{21}{12} \frac{(\delta\xi)^3}{\dot{I}_i} \left(\frac{3\delta_i}{\dot{I}_i} \partial\dot{I}_i - \partial\delta_i\right) (\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial\tau^2}$$

$$\left. - \frac{21(\delta\xi)^5}{12\,\dot{I}_i} \left(-\frac{3\,\delta_i}{\dot{I}_i} \partial\dot{I}_i + \partial\delta_i\right) \frac{48}{K'} + 0\,(\delta\xi^6) \right\}$$

c) - FORMULE A 3 POINTS

A partir des relations (3), (4), (5) ou (6), (7), (8) on obtient

$$(\delta\xi)^3 \partial^3 U_{i,j}^{\pm} = \frac{1}{1 \mp \frac{2 \times 36}{24\,\dot{I}_i}(\delta\xi)\,\partial\dot{I}_i + \frac{15(\delta\xi)^2}{12\,\dot{I}_i}\left[\frac{6}{\dot{I}_i}(\partial\dot{I}_i)^2 - 3\partial^2\dot{I}_i - \delta_i K\right]}$$

$$\left\{ \pm U_{i\pm 3,j} \mp 3 U_{i\pm 2,j} \pm 3 U_{i\pm 1,j} \mp U_{i,j} \right.$$

$$+ \left[\pm \frac{36(\delta\xi)^2}{24\,\dot{I}_i} \partial^2\dot{I}_i - \frac{15(\delta\xi)^3}{12\,\dot{I}_i}\left(\frac{3}{\dot{I}_i} \partial\dot{I}_i \partial^2\dot{I}_i - \partial^3\dot{I}_i\right)\right] (\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i,j}$$

$$+ \left[\pm \frac{36\,\delta_i(\delta\xi)^2}{24\,\dot{I}_i} - \frac{15\,(\delta\xi)^3}{12\,\dot{I}_i}\left(\frac{3\delta_i}{\dot{I}_i} \partial\dot{I}_i - \partial\delta_i\right)\right] (\delta\xi)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial\tau^2}$$

$$\left. \mp \frac{36\,\delta_i(\delta\xi)^4}{24\,\dot{I}_i} \frac{48}{K'} - \frac{15\,\delta_i(\delta\xi)^5}{12\,\dot{I}_i}\left(-\frac{3\,\delta_i}{\dot{I}_i} \partial\dot{I}_i + \partial\delta_i\right) \frac{48}{K'} + 0\,(\delta\xi^6) \right\}$$

d) - FORMULE A 2 POINTS

$$(\delta\xi)^3 \partial^3 U_{i,j}^{\pm} = \frac{1}{1 \mp \frac{2 \times 34(\delta\xi)}{24\ \dot{\underline{I}}_i}\ \partial\dot{\underline{I}}_i + \frac{13(\delta\xi)^2}{12\ \dot{\underline{I}}_i}\left[\frac{6}{\dot{\underline{I}}_i}(\partial\dot{\underline{I}}_i)^2 - 3\partial^2\dot{\underline{I}}_i - \underline{\delta}_i K\right]}$$

$$\left\{ \pm (\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i\pm2,j} \mp U_{i\pm2,j} \pm U_{i\pm1,j} \mp U_{i,j} \right.$$

$$+ \left[\pm\frac{34(\delta\xi)^2}{24\ \dot{\underline{I}}_i}\partial^2\dot{\underline{I}}_i - \frac{13(\delta\xi)^3}{12\ \dot{\underline{I}}_i}\left(\frac{3}{\dot{\underline{I}}_i}\partial\dot{\underline{I}}_i\partial^2\dot{\underline{I}}_i - \partial^3\dot{\underline{I}}_i\right)\right](\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j}$$

$$+ \left[\pm\frac{34(\delta\xi)^2}{24\ \dot{\underline{I}}_i}\underline{\delta}_i - \frac{13(\delta\xi)^3}{12\ \dot{\underline{I}}_i}\left(\frac{3\ \underline{\delta}_i}{\dot{\underline{I}}_i}\partial\dot{\underline{I}}_i - \partial\underline{\delta}_i\right)\right](\delta\xi)^2\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial\tau^2}$$

$$\left. \mp \frac{34\ \underline{\delta}_i(\delta\xi)^4}{24\ \dot{\underline{I}}_i}\frac{48}{K'} - \frac{13(\delta\xi)^5}{12\ \dot{I}_i}\left(-\frac{3\ \underline{\delta}_i}{\dot{\underline{I}}_i}\partial\dot{\underline{I}}_i + \partial\underline{\delta}_i\right)\frac{48}{K'} + 0\,(\delta\xi^6)\right\}$$

e) - FORMULE A 1 POINT : $i = [1\ ;\ n]$ (2.2.3.5)

Pour $i = [1\ ;\ n]$ on connait $U_{i\mp1,j}$ et $\partial^2 U_{i\mp1,j}$, tous deux nuls d'après les conditions aux limites. On est ainsi conduit à utiliser les relations suivantes :

$$(A)\quad (\delta\xi)^2\partial^2 U_{i\mp1,j} = (\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j} \mp (\delta\xi)^3\partial^3 U_{i,j}^{\mp} + \frac{(\delta\xi)^4}{2}\partial^4 U_{i,j}^{\mp}$$

$$- \frac{(\delta\xi)^5}{6}\partial^5 U_{i,j}^{\mp} + \frac{(\delta\xi)^6}{24}\partial^6 U\,(\xi_i \mp \theta_{i\mp1}^2\delta\xi\ ,\ \tau_j)$$

$$(B)\quad U_{i+1,j} = U_{i,j} + \delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^2}{2}\partial^2 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^3}{6}\partial^3 U_{i,j}^{+} + \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$(C)\quad U_{i-1,j} = U_{i,j} - \delta\xi\ U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^2}{2}\partial^2 U_{i,j} - \frac{(\delta\xi)^3}{6}\partial^3 U_{i,j}^{-} + \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

multipliées respectivement par (A), (B) et (C)

en faisant A = - C B = C

les inconnues $\partial U_{i,j}$ et $\partial^2 U_{i,j}$ disparaissent ; en remplaçant d'autre part $\partial^3 U^-_{i,j}$ par $\partial^3 U^+_{i,j} - \Delta\partial^3 U_{i,j}$ pour i = 1 ou bien $\partial^3 U^+_{i,j}$ par $\partial^3 U^-_{i,j} + \Delta\partial^3 U_{i,j}$ pour i = n il vient :

$$(\partial\xi)^3 \Delta\partial^3 U_{i,j} = \frac{1}{\frac{5}{6} \pm \frac{2x11(\delta\xi)}{24\,\underline{\dot{I}}_i}\,\partial\dot{I}_i + \frac{19(\delta\xi)^2}{120\,\underline{\dot{I}}_i}\left[\frac{6}{\underline{\dot{I}}_i}(\partial\underline{\dot{I}}_i)^2 - 3\partial^2\underline{\dot{I}}_i - \underline{\delta}_i K\right]}$$

$$\left\{ \pm (\delta\xi)^2\partial^2 U_{i\mp1,j} - U_{i-1,j} + 2\,U_{i,j} - U_{i+1,j} \right.$$

$$\pm \left[1 \pm \frac{2x10(\delta\xi)}{24\,\underline{\dot{I}}_i}\,\partial\dot{I}_i + \frac{(\delta\xi)^2}{6\underline{\dot{I}}_i}\left(\frac{6}{\underline{\dot{I}}_i}(\partial\underline{\dot{I}}_i)^2 - 3\partial^2\underline{\dot{I}}_i - \underline{\delta}_i K\right)\right](\delta\xi)^3\partial^3 U^{\pm}_{i,j}$$

$$+ \left[\frac{10(\delta\xi)^2}{24\,\underline{\dot{I}}_i}\partial^2\underline{\dot{I}}_i \pm \frac{(\delta\xi)^3}{6\,\underline{\dot{I}}_i}\left(\frac{3}{\underline{\dot{I}}_i}\partial\underline{\dot{I}}_i\,\partial^2\underline{\dot{I}}_i - \partial^3\underline{\dot{I}}_i\right)\right](\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j}$$

$$+ \left[\frac{10(\delta\xi)^2}{24\,\underline{\dot{I}}_i}\underline{\delta}_i \pm \frac{(\delta\xi)^3}{6\underline{\dot{I}}_i}\left(\frac{3\underline{\delta}_i}{\underline{\dot{I}}_i}\partial\underline{\dot{I}}_i - \partial\underline{\delta}_i\right)\right](\delta\xi)^2\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial\tau^2}$$

$$\left. - \frac{10\,\underline{\delta}_i(\delta\xi)^4}{24\,\underline{\dot{I}}_i}\frac{48}{K'} \pm \frac{(\delta\xi)^5}{6\underline{\dot{I}}_i}\left(-\frac{3\,\underline{\delta}_i}{\underline{\dot{I}}_i}\partial\underline{\dot{I}}_i + \partial\underline{\delta}_i\right)\frac{48}{K'} + 0\,(\delta\xi^6)\right\}$$

$\partial^3 U^+_{i,j}$ pour i = 1 et $\partial^3 U^-_{i,j}$ pour i = n étant calculés par la formule a) puisque le nombre de points disponibles du côté + pour i = 1 ( - pour i = n) est suffisant pour l'application de cette formule.

## 2) - CALCUL DE $\Delta\,\dfrac{\partial^3 U_{i,j}}{\partial\xi^3}$

Dans le cas général où le nombre de points disponibles de chaque côté de la discontinuité est supérieur ou égal à 2, il suffit d'écrire :

$$(\delta\xi)^3\,\Delta\partial^3 U_{i,j} = (\delta\xi)^3\,\partial^3 U^+_{i,j} - (\delta\xi)^3\,\partial^3 U^-_{i,j}$$

en employant les formules a) à d) pour le second membre.

On n'a procédé de cette manière que dans le cas d'une travée isostatique d'inertie constante. Pour tous les autres cas on a établi une série de 4 formules prenant en compte la présence d'eventuels appuis intermédiaires au droit desquels on peut écrire

$$U = \Delta\partial U = \Delta\partial^2 U = 0$$

mais où la valeur de la discontinuité de la dérivée troisième est inconnue. Désignons par $i_a$ l'indice d'un appui (intermédiaire ou d'extrémité).

a) - $i \neq [\, i_a - 2 \; ; \; i_a - 1 \; ; \; i_a + 1 \; ; \; i_a + 2 \; ; \; j - (j_o)_{im} - 2 \; ; \; j - (j_o)_{im} - 1 \; ; \; j - (j_o)_{im} + 1 \; ; \; j - (j_o)_{im} + 2 \,]$ (2.2.3.6)

Les relations (3), (4), (5), (6), (7), (8) permettent d'écrire.

$$A(U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) + B(U_{i-2,j} + U_{i+2,j}) + C(U_{i-3,j} + U_{i+3,j})$$

$$= (A + B + C)\; 2\, U_{i,j} + \left[ \frac{A}{6} + \frac{8B}{6} + \frac{27C}{6} \right.$$

$$\left. + (A + 32B + 24C)\; \frac{(\delta\xi)^2}{120 \underline{\dot{I}}_i} \left( \frac{6}{\underline{\dot{I}}_i} (\partial \underline{\dot{I}}_i)^2 - 3\partial^2 \underline{\dot{I}}_i - \underline{\delta}_i K \right) \right]$$

$$(\delta\xi)^3 \Delta\, \partial^3 U_{i,j} + 0\,(\delta\xi^6)$$

avec $A = 15\,C$ $\qquad B = -\,6\,C$

on fait disparaître ainsi les termes $\partial^2 U_{i,j}$ et $[\, \partial^4 U^-_{i,j} + \partial^4 U^+_{i,j} \,]$, la formule résultante étant (2.2.3.6)

b) - $i = [\, i_a - 2 \; ; \; i_a + 2 \; ; \; j - (j_o)_{im} - 2 \; ; \; j - (j_o)_{im} + 2 \,]$ (2.2.3.7)

Considérons les relations (3) à (7)

$$U_{i+3,j} = U_{i,j} + 3\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(3\delta\xi)^2}{2}\,\partial^2 U_{i,j} + \frac{(3\delta\xi)^3}{6}\,\partial^3 U^+_{i,j}$$

$$+ \frac{(3\delta\xi)^4}{24}\,\partial^4 U^+_{i,j} + \frac{(3\delta\xi)^5}{120}\,\partial^5 U^+_{i,j} + 0\,(\delta\xi^6)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$U_{i-2,j} = U_{i,j} - 2\,\delta\xi\,\partial U_{i,j} + \frac{(2\delta\xi)^2}{2}\partial^2 U_{i,j} - \frac{(2\delta\xi)^3}{6}\partial^3 U^-_{i,j}$$

$$+ \frac{(2\delta\xi)^4}{24}\partial^4 U^-_{i,j} - \frac{(2\delta\xi)^5}{120}\partial^5 U^-_{i,j} + O(\delta\xi^6)$$

et posons $\partial^m U^+_{i,j} = \partial^m U^-_{i,j} + \Delta\partial^m U_{i,j}$

$m = 3, 4, 5$

on peut éliminer les dérivées $\partial U_{i,j}$, $\partial^2 U_{i,j}$, $\partial^3 U^-_{i,j}$ et $\partial^4 U^-_{i,j}$ entre ces équations.

La formule résultante (regroupée avec la formule symétrique) est (2.2.3.7)

c) - $i = \left[ i_a - 1 \; ; \; i_a + 1 \; ; \; j - (j_o)_{im} - 1 \; ; \; j - (j_o)_{im} + 1 \right]$

(2.2.3.8) et (2.2.3.8)bis

La formule (2.2.3.8) résulte de l'élimination des dérivées $\partial U_{i,j}$ , $\partial^2 U_{i,j}$ , $\partial^3 U^-_{i,j}$ , $\partial^4 U^-_{i,j}$ et $\partial^5 U^-_{i,j}$ entre les relations (2), (3), (4), (5), (6) dans lesquelles on pose :

$$\partial^m U^+_{i,j} = \partial^m U^-_{i,j} + \Delta U_{i,j}$$

$m = 3, 4, 5$

et la relation

$$(\delta\xi)^2\partial^2 U_{i-1,j} = (\delta\xi)^2\partial^2 U_{i,j} - (\delta\xi)^3\partial^3 U^-_{i,j}$$

$$+ \frac{(\delta\xi)^4}{2}\partial^4 U^-_{i,j} - \frac{(\delta\xi)^5}{6}\partial^5 U^-_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^6}{24}\partial^6 U(\xi_i - \theta^2_{i-1}\delta\xi \; , \; \tau_j)$$

la formule symétrique est obtenue à partir des relations (5), (6), (7), (8), (9) et de l'expression de $(\delta\xi)^2\partial^2 U_{i+1,j}$

Si l'on considère seulement les relations (2), (3), (4), (5), (6) ou (5), (6), (7), (8), (9) on peut faire disparaître $\partial U_{i,j}$, $\partial^2 U_{i,j}$, $\partial^3 U^{\mp}_{i,j}$ et $\partial^4 U^{\mp}_{i,j}$, ce qui conduit à (2.2.3.8)bis.

## ANNEXE 4 : DERIVEES QUATRIEME $\frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial \xi^4}$

### 1) - FORMULE GENERALE : $i \neq [1 ; n]$ (2.2.4.1)

En un noeud (i,j) intérieur à $\Omega_{im}$ (fig.2)

$$U_{i+1,j} = U_{i,j} + \delta\xi\, \partial U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^2}{2} \partial^2 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^3}{6} \partial^3 U_{i,j}$$
$$+ \frac{(\delta\xi)^4}{24} \partial^4 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^5}{120} \partial^5 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^6}{720} \partial^6 U(\xi_i + \theta_{i+1}\delta\xi , \tau_j)$$

$$U_{i-1,j} = U_{i,j} - \delta\xi\, \partial U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^2}{2} \partial^2 U_{i,j} - \frac{(\delta\xi)^3}{6} \partial^3 U_{i,j}$$
$$+ \frac{(\delta\xi)^4}{24} \partial^4 U_{i,j} - \frac{(\delta\xi)^5}{120} \partial^5 U_{i,j} + \frac{(\delta\xi)^6}{720} \partial^6 U(\xi_i - \theta_{i-1}\delta\xi , \tau_j)$$

additionnons membre à membre

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} = 2 U_{i,j} + (\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i,j} + \frac{2(\delta\xi)^4}{24} \partial^4 U_{i,j} + O(\delta\xi^6)$$

de même

$$\partial^2 U_{i+1,j} + \partial^2 U_{i-1,j} = 2\, \partial^2 U_{i,j} + (\delta\xi)^2\, \partial^4 U_{i,j}$$
$$+ \frac{(\delta\xi)^4}{24} \left[ \partial^6 U(\xi_i + \theta_{i+1}^2 \delta\xi , \tau_j) + \partial^6 U(\xi_i - \theta_{i-1}^2 \delta\xi , \tau_j) \right]$$

et par suite, en éliminant $\partial^4 U_{i,j}$

$$(\delta\xi)^4\, \partial^4 U_{i,j} = \frac{24}{20} \left[ -2 (U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) + 4 U_{i,j} \right.$$
$$\left. + (\delta\xi)^2 ( \partial^2 U_{i-1,j} + \partial^2 U_{i+1,j} ) + O(\delta\xi^6) \right] \qquad (11)$$

dans le cas général où i est différent de 1 et n

$$(\delta\xi)^2 ( \partial^2 U_{i-1,j} + \partial^2 U_{i+1,j} ) = U_{i-2,j} - 2 U_{i-1,j} + 2 U_{i,j}$$
$$- 2 U_{i+1,j} + U_{i+2,j} + \left[ -\frac{1}{6} - \frac{2\delta\xi}{24 \dot{I}_{i-1}} \partial \dot{I}_{i-1} \right.$$

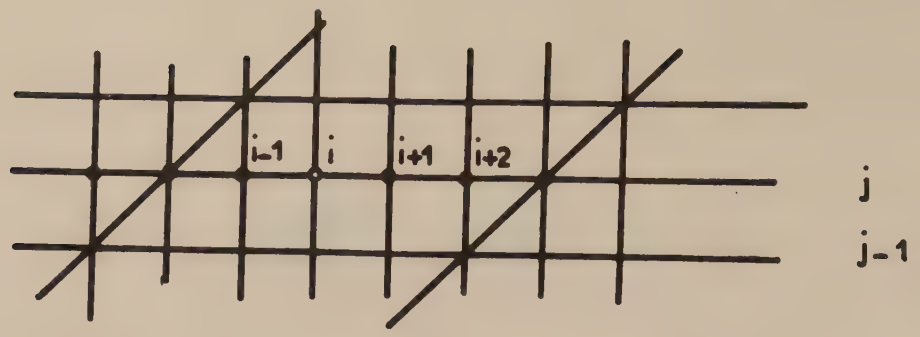



Fig. 2

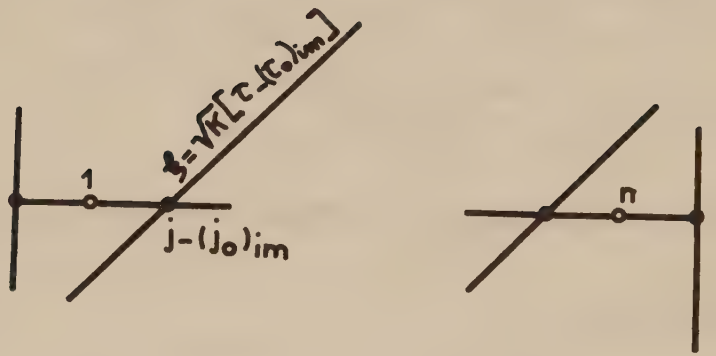



Fig. 3

$$- \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\dot{\underline{I}}_{i-1}} \left( \frac{6}{\dot{\underline{I}}_{i-1}} (\partial\dot{\underline{I}}_{i-1})^2 - 3\,\partial^2\dot{\underline{I}}_{i-1} - \underline{\delta}_{i-1} K \right) \Bigg] (\delta\xi)^3 \Delta\partial^3 U_{i-1,j}$$

$$+ \left[ - \frac{1}{6} + \frac{2\delta\xi}{24\,\dot{\underline{I}}_{i+1}} \partial\dot{\underline{I}}_{i+1} - \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\dot{\underline{I}}_{i+1}} \left( \frac{6}{\dot{\underline{I}}_{i+1}} (\partial\dot{\underline{I}}_{i+1})^2 - 3\partial^2\dot{\underline{I}}_{i+1} - \underline{\delta}_{i+1} K \right) \right]$$

$$(\delta\xi)^3 \Delta\partial^3 U_{i+1,j} - \frac{4(\delta\xi)^4}{24} \partial^4 U_{i,j} + 0\,(\delta\xi^6)$$

d'où finalement la formule générale (2.2.4.1), en remplaçant dans (11) $(\delta\xi)^2 (\partial^2 U_{i-1,j} + \partial^2 U_{i+1,j})$ par l'expression qui vient d'être établie.

$$(\delta\xi)^4 \partial^4 U_{i,j} = U_{i-2,j} - 4\,U_{i-1,j} + 6\,U_{i,j} - 4\,U_{i+1,j} + U_{i+2,j}$$

$$+ \left[ - \frac{1}{6} - \frac{2\delta\xi}{24\,\dot{\underline{I}}_{i-1}} \partial\dot{\underline{I}}_{i-1} - \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\dot{\underline{I}}_{i-1}} \left( \frac{6}{\dot{\underline{I}}_{i-1}} (\partial\dot{\underline{I}}_{i-1})^2 - 3\partial^2\dot{\underline{I}}_{i-1} - \underline{\delta}_{i-1} K \right) \right]$$

$$(\delta\xi)^3 \Delta\partial^3 U_{i-1,j}$$

$$+ \left[ - \frac{1}{6} + \frac{2\delta\xi}{24\,\dot{\underline{I}}_{i+1}} \partial\dot{\underline{I}}_{i+1} - \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\dot{\underline{I}}_{i+1}} \left( \frac{6}{\dot{\underline{I}}_{i+1}} (\partial\dot{\underline{I}}_{i+1})^2 - 3\,\partial^2\dot{\underline{I}}_{i+1} - \underline{\delta}_{i+1} K \right) \right]$$

$$(\delta\xi)^3 \Delta\partial^3 U_{i+1,j} + 0\,(\delta\xi^6)$$

2 - POINTS VOISINS DES FRONTIERES $\xi = o$ ou $\xi = 1$ : $i = [1 ; n]$

Dans ce cas l'une des deux dérivées $\partial^2 U_{i-1,j}$ ou $\partial^2 U_{i+1,j}$ est nulle en vertu des conditions aux limites ; on exprime l'autre par la relation

$$(\delta\xi)^2 \partial^2 U_{i \mp 1,j} = U_{i \mp 2,j} - 2\,U_{i \mp 1,j} + U_{i,j}$$

$$+ \left[ - \frac{1}{6} \mp \frac{2\delta\xi}{24\,\dot{\underline{I}}_{i \mp 1}} \partial\dot{\underline{I}}_{i \mp 1} - \frac{(\delta\xi)^2}{120\,\dot{\underline{I}}_{i \mp 1}} \left( \frac{6}{\dot{\underline{I}}_{i \mp 1}} (\partial\dot{\underline{I}}_{i \mp 1})^2 - 3\partial^2\dot{\underline{I}}_{i \mp 1} - \underline{\delta}_{i \mp 1} K \right) \right]$$

$$(\delta\xi)^3 \Delta\partial^3 U_{i \mp 1,j} - \frac{2(\delta\xi)^4}{24} \partial^4 U^{\pm}_{i \mp 1,j} + 0\,(\delta\xi^6) \qquad (12)$$

et par suite :

$$(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}}{\delta\tau^2} = 2\,U_{i,j} - 5\,U_{i,j-1} + 4\,U_{i,j-2} - U_{i,j-3} + 0\,(\delta\tau^4)$$

1.2 - CALCUL DES DERIVEES PARTIELLES AUX INSTANTS INITIAUX : $j < 4$

La formule générale n'est pas applicable dans ces cas pour lesquels on peut cependant utiliser le fait que $U_{i,1}$ et $\frac{\partial U_{i,1}}{\partial\tau}$ sont connus d'après les conditions initiales.

a) - $j = 3$ (2.3.1.2)

A partir des trois équations

$$U_{i,2} = U_{i,3} - \delta\tau \frac{\partial U_{i,3}}{\partial\tau} + \frac{(\delta\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 U_{i,3}}{\partial\tau^2} - \frac{(\delta\tau)^3}{3} \frac{\partial^3 U_{i,3}}{\partial\tau^3} + \frac{(\delta\tau)^4}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial\tau^4}(\xi_i, \tau_3 - \theta_2\delta\tau)$$

$$U_{i,1} = U_{i,3} - 2\,\delta\tau \frac{\partial U_{i,3}}{\partial\tau} + \frac{(2\delta\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 U_{i,3}}{\partial\tau^2} - \frac{(2\delta\tau)^3}{6} \frac{\partial^3 U_{i,3}}{\partial\tau^3} + \frac{(2\delta\tau)^4}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial\tau^4}(\xi_i, \tau_3 - 2\theta_1\delta\tau)$$

$$\frac{\partial U_{i,1}}{\partial\tau} = 0 = \frac{\partial U_{i,3}}{\partial\tau} - 2\,\delta\tau \frac{\partial^2 U_{i,3}}{\partial\tau^2} + \frac{(2\delta\tau)^3}{2} \frac{\partial^3 U_{i,3}}{\partial\tau^3} - \frac{(2\delta\tau)^3}{6} \frac{\partial^4 U}{\partial\tau^4}(\xi_i, \tau_3 - 3\theta_1^1\delta\tau)$$

on peut éliminer $\frac{\partial U_{i,3}}{\partial\tau}$ et $\frac{\partial^3 U_{i,3}}{\partial\tau^3}$ et obtenir ainsi (2.3.1.2)

$$(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{i,3}}{\partial\tau^2} = + \frac{5}{2} U_{i,3} - 8\,U_{i,2} + \frac{11}{2} U_{i,1}\ 0\,(\delta\tau^4)$$

b) - $j = 2$ (2.3.1.3)

Les deux dernières relations du paragraphe a) entrainent (2.3.1.3)

$$(\delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U_{i,2}}{\partial\tau^2} = 2\,(U_{i,2} - U_{i,1}) + 0\,(\delta\tau^3)$$

1.3 - CAS PARTICULIER DES POINTS DE $\Omega_{im+1}$ SITUES AU VOISINAGE DE LA FRONTIERE COMMUNE AVEC $\Omega_{im}$

Le noeud $(j - (j_o)_{im}, j)$ se trouve sur la frontière com-

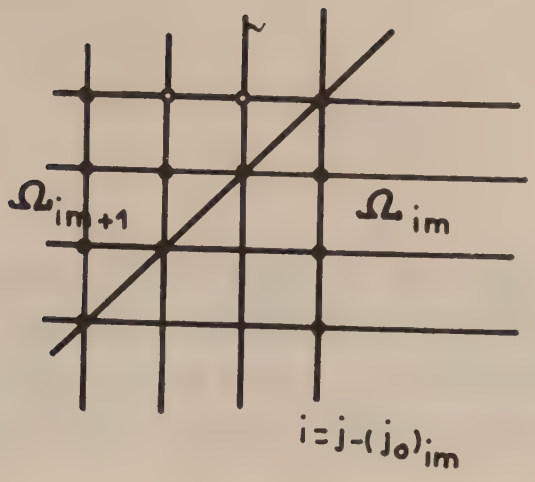



Fig. 4

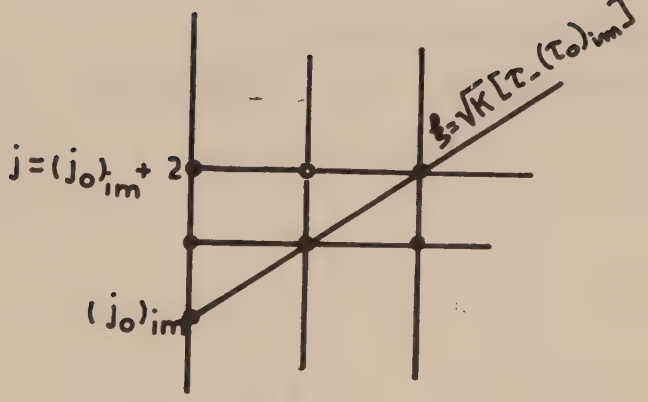



Fig. 5

mune aux sous domaines $\Omega_{im+1}$ et $\Omega_{im}$ (fig. 4). La formule générale (2.3.1.1) ne s'applique pas aux noeuds voisins $(j - (j_o)_{im} - 1, j)$ et $(j - (j_o)_{im} - 2, j)$ situés dans $\Omega_{im+1}$ ; elle est par contre applicable aux noeuds $(j - (j_o)_{im} - 3, j)$ et $(j - (j_o)_{im}, j)$ où l'on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im},j}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-1,j}}{\partial \tau^2} + \delta\xi \frac{\partial^3 U_{j-(j_o)_{im}-1,j}}{\partial \xi \partial \tau^2} + O(\delta\xi^2)$$

et

$$\frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-3,j}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-1,j}}{\partial \tau^2} - 2\delta\xi \frac{\partial^3 U_{j-(j_o)_{im}-1,j}}{\partial \xi \partial \tau^2} + O(\delta\xi^2)$$

par conséquent

$$\frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-1,j}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-3,j}}{\delta \tau^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im},j}}{\delta \tau^2} + O(\delta\xi^2)$$

c'est la formule (2.3.1.4)

de même

$$\frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-2,j}}{\partial \tau^2} = \frac{2}{3} \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-3,j}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im},j}}{\partial \tau^2} + O(\delta\xi^2) \qquad (2.3.1.5)$$

Le noeud $j-(j_o)_{im}-3$ n'existe pas si $j-(j_o)_{im}$ est égal à 2 ; dans ce cas

$$\frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-2,j}}{\partial \tau^2} = 0$$

puisque $U(0,\tau) = 0$ (fig.5).

on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 U_{j-(j_o)_{im}-2,j}}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{\partial^2 U_{1,j}}{\partial \tau^2} - \delta\xi \frac{\partial^2 U_{1,j}}{\partial \xi \partial \tau^2} + 0(\delta\xi^2)$$

$$\frac{\partial^2 U_{2,j}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U_{1,j}}{\partial \tau^2} + \delta\xi \frac{\partial^3 U_{1,j}}{\partial \xi \partial \tau^2} + 0(\delta\xi^2)$$

d'où l'on tire (2.3.1.4) bis

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{2,j}}{\partial \tau^2} + 0(\delta\xi^2)$$

## 2 - DERIVEES $\frac{dU}{d\tau}$

### 2.1 - FORMULE GENERALE (2.3.2.1)

Les développements de Taylor portent sur la fonction $U\left(\sqrt{K}\left[\tau - (\tau_o)_{im}\right], \tau\right)$ de la seule variable ; soit $U_j$ sa valeur à l'époque j.

$$U_{j-1} = U_j - \delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} + \frac{(\delta\tau)^2}{2} \frac{d^2U_j}{d\tau^2} + 0(\delta\tau^3)$$

$$U_{j-2} = U_j - 2\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} + \frac{(2\delta\tau)^2}{2} \frac{d^2U_j}{d\tau^2} + 0(\delta\tau^2)$$

d'où l'expression (2.3.2.1)

$$\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = \frac{U_{j-2} - 4U_{j-1} + 3U_j}{2} + 0(\delta\tau^3)$$

### 2.2 - CAS PARTICULIER DES NOEUDS SITUES AU VOISINAGE DE LA FRONTIERE $\xi = 0$

#### a) - $j = (j_o)_{im}$ (2.3.2.2)

Dans ce cas $U_{j-1}$ et $U_{j-2}$ n'existent pas il faut avoir recours à des méthodes particulières. On peut remarquer que l'on a :

$$\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = \delta\tau \frac{d}{d\tau} \left\{ U\left[\sqrt{K}\left(\tau - (\tau_o)_{im}, \tau\right)\right] \right\}_{\tau = (\tau_o)_{im}}$$

$$= \delta\tau \left[ \sqrt{K} \frac{\partial U_j}{\partial \xi} + \frac{\partial U_j}{\partial \tau} \right]_{\tau = (\tau_o)_{im}}$$

or $\left.\frac{\partial U_j}{\partial \tau}\right|_{\tau = (\tau_o)_{im}} = 0$ puisque $U(0,\tau) = 0$

donc $\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = \delta\tau \sqrt{K} \left.\frac{\partial U_j}{\partial \xi}\right|_{\tau = (\tau_o)_{im}} = \delta\tau \sqrt{K} \left.\frac{\partial U(\xi,(\tau_o)_{im})}{\partial \xi}\right|_{\xi = 0}$

si $(j_o)_{im}$ vaut 1 et si l'inertie est constante

$$U(\xi, 0) = \frac{48\,\delta}{24\,K'} \left[ \xi (1 - \xi) (1 - \xi + \xi^2) \right]$$

$$\left.\frac{\partial U(\xi, 0)}{\partial \xi}\right|_{\xi = 0} = \frac{48\,\delta}{24\,K'}$$

par conséquent : $\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = \delta\tau \sqrt{K} \frac{48\,\delta}{24\,K'}$

dans tous les autres cas la formule approchée

$$\left.\frac{\partial U(\xi,(\tau_o)_{im}}{\delta\xi}\right|_{\xi = 0} = - \frac{3\,U(0,(\tau_o)_{im}) + 4\,U(\delta\xi, (\tau_o)_{im}) - U(2\delta\xi,(\tau_o)_{im})}{2\,\delta\xi} + O(\delta\xi^2)$$

analogue à (2.3.2.1) permet de calculer $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ et d'en déduire

$$\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = - \frac{3}{2} U(0,(\tau_o)_{im}) + 2\,U(\delta\xi,(\tau_o)_{im}) - \frac{1}{2} U(2\,\delta\xi,(\tau_o)_{im}) + O(\delta\xi^3) \qquad (2.3.2.2)$$

b) - $j = (j_o)_{im} + 1$ (2.3.2.3)

Des relations

$$U_{j-1} = 0 = U_j - \delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} + \frac{(\delta\tau)^2}{2} \frac{d^2U_j}{d\tau^2} - \frac{(\delta\tau)^3}{6} \frac{d^3U}{d\tau^3} (\tau_j - \theta_{j-1}\delta\tau)$$

et

$$\frac{dU_{j-1}}{d\tau} = \frac{dU_j}{d\tau} - \delta\tau \frac{d^2U_j}{d\tau^2} + \frac{(\delta\tau)^2}{2} \frac{d^3U}{d\tau^3} (\tau_j - \theta^1_{j-1}\delta\tau)$$

On en déduit (2.3.2.3)

$$\delta\tau \frac{dU_j}{d\tau} = - \delta\tau \frac{dU_{j-1}}{d\tau} + 2 U_j + 0 (\delta\tau^3)$$

$\delta\tau \frac{dU_{j-1}}{d\tau}$ étant calculé par (2.3.2.2.)

## 3 - DERIVEES $\frac{d^2U}{d\tau^2}$

### 3.1 - FORMULE GENERALE (2.3.3.1) : $j \geqslant (j_o)_{im} + 3$

Il suffit d'appliquer (2.3.1.1) à la fonction $U ( \sqrt{K} [\tau - (\tau_o)_{im}], \tau )$ de la variable $\tau$

$$(\delta\tau)^2 \frac{d^2U_j}{d\tau^2} = 2 U_j - 5 U_{j-1} + 4 U_{j-2} - U_{j-3} + 0(\delta\tau^4)$$

### 3.2 - CAS PARTICULIER DES NOEUDS SITUES AU VOISINAGE DE LA FRONTIERE $\xi = 0$

a) $j = (j_o)_{im}$ (2.3.3.2)

Par définition, si $\xi = \sqrt{K} [\tau - (\tau_o)_{im}]$

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left\{ U ( \sqrt{K} [\tau - (\tau_o)_{im}], \tau) \right\}$$

$$= \sqrt{K} \frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial \xi} + \frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial \tau}$$

pour les dérivées seconde

$$\frac{d^2U}{d\tau^2}(j_o)_{im} = \frac{d}{d\tau} \left\{ \sqrt{K} \frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial \xi} + \frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial \tau} \right\}_{\tau = (\tau_o)_{im}}$$

$$= K \left. \frac{\partial^2 U(\xi, (\tau_o)_{im})}{\partial \xi^2} \right|_{\xi = 0} + 2 \sqrt{K} \left. \frac{\partial^2 U(\xi,\tau)}{\partial \tau \delta \xi} \right|_{\substack{\xi = 0 \\ \tau = (\tau_o)_{im}}}$$

$$+ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}(0,\tau) \right|_{\tau = (\tau_o)_{im}}$$

d'après les conditions aux limites le premier et le dernier terme du second membre sont nuls.

Si $(j_o)_{im} = 1$ le second terme est nul car $\frac{\partial U}{\partial \tau}(\xi, 0) = 0$ d'après les conditions initiales et par conséquent

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} = 0$$

Sinon on emploie la formule d'approximation suivante, valable pour toute fonction $C^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-3 f(x) + 4 f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \frac{h^2}{12}\left[ 8 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x + 2\theta_2 h) - 4 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x + \theta_1 h) \right]$$

posons $\frac{\partial U}{\partial \tau}(\xi,\tau) = \phi_\tau(\xi)$

$\phi_\tau(\xi)$ étant $C^3$ (§ III 1.1) on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial U}{\partial \tau}(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_\tau(\xi) = \frac{-3\phi_\tau(\xi) + 4\phi_\tau(\xi+\delta\xi) - \phi_\tau(\xi+2\delta\xi)}{2\,\delta\xi} + 0\,(\delta\xi^2)$$

en vertu des conditions aux limites $\phi_\tau(0) = 0$ par suite

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi}\left[ \frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial \tau} \right] \right|_{\substack{\xi = 0 \\ \tau = (\tau_o)_{im}}} = \frac{4\phi_\tau(\delta\xi) - \phi_\tau(2\delta\xi)}{2\,\delta\xi} + 0\,(\delta\xi^2)$$

si maintenant on considère $\phi$ comme une fonction de $\tau$ on peut lui appliquer la formule d'approximation :

$$\phi_\tau(\xi) = \frac{\partial U(\xi,\tau)}{\delta\tau} = \frac{-3\,U(\xi,\tau) + 4\,U(\xi,\tau-\delta\tau) - U(\xi,\tau-2\delta\tau)}{-2\,\delta\tau} + 0\,(\delta\tau^2)$$

en reportant dans l'expression précédente

$$\left.\frac{\partial^2 U(\xi,\tau)}{\partial\xi\partial\tau}\right|_{\substack{\xi=0\\ \tau=(\tau_o)_{im}}} = \left.\frac{4\left[-3\,U(\delta\xi,\tau)+4\,U(\delta\xi,\tau-\delta\tau)-U(\delta\tau,\tau-2\delta\tau)\right]}{-4\;\delta\xi\;\delta\tau}\right|_{\tau=(\tau_o)_{im}}$$

$$+4\,\frac{O(\delta\tau)^2}{2\,\delta\xi}-\left.\frac{\left[-3\,U(2\delta\xi,\tau)+4\,U(2\delta\xi,\tau-\delta\tau)-U(2\delta\xi,\tau-2\delta\tau)\right]}{-4\,\delta\xi\delta\tau}\right|_{\tau=(\tau_o)_{im}}$$

$$-\frac{O(\delta\tau^2)}{2\,\delta\xi}+O(\delta\xi^2)$$

or $\delta\xi=\sqrt{K}\,\delta\tau$ ; on dispose donc d'une approximation du premier ordre en $O(\delta\tau)$ pour la dérivée mixte que l'on reportera dans l'expression de la dérivée seconde

$$(\delta\tau)^2\,\frac{d^2U}{d\tau^2}(jo)_{im}=\frac{8\left[-3\,U(\delta\xi,\tau)+4\,U(\delta\xi,\tau-\delta\tau)-U(\delta\xi,\tau-2\delta\tau)\right]}{-4}\tau=(\tau_o)_{im}$$

$$-\frac{2\left[-3\,U(2\delta\xi,\tau)+4\,U(2\delta\xi,\tau-\delta\tau)-U(2\delta\xi,\tau-2\delta\tau)\right]_{\tau=(\tau_o)_{im}}}{-4}+O(\delta\tau^3)$$

b) $j=(j_o)_{im}+1$ (2.3.3.3)

On peut écrire les trois relations

$$U_{j-1}=U_j-\delta\tau\,\frac{dU_j}{d\tau}+\frac{(\delta\tau)^2}{2}\,\frac{d^2U_j}{d\tau^2}-\frac{(\delta\tau)^3}{6}\,\frac{d^3U_j}{d\tau^3}+O(\delta\tau^4)$$

$$\frac{dU_{j-1}}{d\tau}=\frac{dU_j}{d\tau}-\delta\tau\,\frac{d\,U_j}{d\tau^2}+\frac{(\delta\tau)^2}{2}\,\frac{d^3U_j}{d\tau^3}+O(\delta\tau^3)$$

$$\frac{d^2U_{j-1}}{d\tau^2}=\frac{d^2U_j}{d\tau^2}-\delta\tau\,\frac{d^3U_j}{d\tau^3}+O(\delta\tau^2)$$

et en déduire (2.3.3.3)

$$(\delta\tau)^2 \frac{d^2U_j}{d\tau^2} = 6\,(U_j - U_{j-1}) - 6\,\delta\tau \frac{dU_{j-1}}{d\tau} - 2\,(\delta\tau)^2 \frac{d^2U_{j-1}}{d\tau^2}$$

$$+ 0\,(\delta\tau^4)$$

$\delta\tau \frac{dU_{j-1}}{d\tau}$ et $(\delta\tau)^2 \frac{d^2U_{j-1}}{d\tau^2}$ étant calculés par (2.3.2.2) et(2.3.3.2)

c) $j = (j_o)_{im} + 2$ (2.3.3.4)

Le résultat est analogue à (2.3.1.2), avec cependant un terme complémentaire fourni par (2.3.2.2)

$$(\delta\tau)^2 \frac{d^2U_j}{d\tau^2} = \frac{5}{2} U_j - 8\,U_{j-1} + \frac{11}{2} U_{j-2} + 3\,\delta\tau \frac{dU_{j-2}}{d\tau}$$

$$+ 0\,(\delta\tau^4)$$

# ANNEXE 6

## PRISE EN COMPTE DES SUSPENSIONS

Indiquons d'abord les expressions de $\underline{\theta}_{ims}(\tau)$ et $\dot{\underline{\theta}}_{ims}(\tau)$

$$\underline{\theta}_{ims}(\tau) = \underline{C}_{ims} \exp \underline{r}_{3ims}\,\tau + \underline{D}_{ims} \exp \underline{r}_{4ims}\,\tau + \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} - \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \frac{\underline{CR}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}}\,\underline{y}_{im} + \frac{\underline{\varepsilon}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}}\,\frac{d\underline{y}_{im}}{d\eta} \right) \frac{\exp \underline{r}_{3ims}(\tau-\eta) - \exp \underline{r}_{4ims}(\tau-\eta)}{\underline{r}_{3ims} - \underline{r}_{4ims}}\, d\eta$$

$$\dot{\underline{\theta}}_{ims}(\tau) = \underline{r}_{3ims}\,\underline{C}_{ims} \exp \underline{r}_{3ims}\,\tau + \underline{r}_{4ims}\,\underline{D}_{ims} \exp \underline{r}_{4ims}\,\tau + \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} - \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \frac{\underline{CR}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}}\,\underline{y}_{im} + \frac{\underline{\varepsilon}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}}\,\frac{d\underline{y}_{im}}{d} \right) \frac{\underline{r}_{3ims} \exp \underline{r}_{3ims}(\tau-\eta) - \underline{r}_{4ims} \exp \underline{r}_{4ims}(\tau-\eta)}{\underline{r}_{3ims} - \underline{r}_{4ims}}\, d\eta$$

avec

$$\underline{C}_{ims} = \frac{\dot{\underline{\theta}}_{ims}\left((\tau_o)_1\right) - \underline{\theta}_{ims}\left((\tau_o)_1\right) \underline{r}_{4ims}}{\underline{r}_{3ims} - \underline{r}_{4ims}}$$

$$\underline{D}_{ims} = \frac{\dot{\underline{\theta}}_{ims}\left((\tau_o)_1\right) - \underline{\theta}_{ims}\left((\tau_o)_1\right) \underline{r}_{3ims}}{\underline{r}_{3ims} - \underline{r}_{4ims}}$$

Si les racines des équations caractéristiques sont doubles

$$\underline{Y}_{ims}(\tau) = \left( \underline{A}'_{ims}\,\tau + \underline{B}'_{ims} \right) \exp \underline{r}_{ims}\,\tau + \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} (\tau - \eta) \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \underline{\varepsilon}_{ims} \frac{d\underline{y}_{im}}{d\eta} + \underline{CR}_{ims}\underline{Y}i_m \right) \exp \underline{r}_{ims}\,(\tau - \eta)\, d\eta$$

$$\dot{\underline{Y}}_{ims}(\tau) = (\underline{A}'_{ims}\,\tau + \underline{B}'_{ims})\,\underline{r}_{ims}\exp \underline{r}_{ims}\,\tau + \underline{A}'_{ims}\exp \underline{r}_{ims}\,\tau$$

$$+ \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \underline{\varepsilon}_{ims} \frac{d\underline{y}_{im}}{d\eta} + \underline{CR}_{ims}\,\underline{y}_{im} \right) \left[ (\tau-\eta)\,\underline{r}_{ims} + 1 \right] \exp \underline{r}_{ims}(\tau-\eta)\, d\eta$$

avec

$$\underline{A}'_{ims} = \dot{\underline{Y}}_{ims}\left((\tau_o)_1\right) - \underline{Y}_{ims}\left((\tau_o)\right)\,\underline{r}_{ims}$$

$$\underline{B}'_{ims} = \underline{Y}_{ims}\left((\tau_o)_1\right)$$

$$\underline{r}_{ims} = -\frac{n_{ims}\,\underline{\varepsilon}_{ims}}{2}$$

$$\underline{\theta}_{ims}(\tau) = (\underline{C}'_{ims}\,\tau + \underline{D}'_{ims})\exp \underline{r}'_{ims}\,\tau$$

$$+ \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} -(\tau-\eta) \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \frac{\underline{CR}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}}\,\underline{y}_{im} + \frac{\underline{\varepsilon}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}} \frac{d\underline{y}_{im}}{d\eta} \right) \exp \underline{r}'_{ims}(\tau-\eta)\, d\eta$$

$$\dot{\underline{\theta}}_{ims}(\tau) = (\underline{C}'_{ims}\,\tau + \underline{D}'_{ims})\,\underline{r}'_{ims}\exp \underline{r}'_{ims}\,\tau + \underline{C}'_{ims}\exp \underline{r}'_{ims}\,\tau$$

$$+ \int_{(\tau_o)_1}^{\tau} - \sum_{im=1}^{n_{ims}} \left( \frac{\underline{CR}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{im}}\,\underline{y}_{im} + \frac{\underline{\varepsilon}_{ims}}{\underline{J}_{im}\,\underline{d}_{ims}} \frac{d\underline{y}_{im}}{d\eta} \right) \left[ (\tau-\eta)\,\underline{r}'_{ims} + 1 \right] \exp \underline{r}'_{ims}(\tau-\eta)\, d\eta$$

avec

$$\underline{C}'_{ims} = \dot{\underline{\theta}}_{ims}\left((\tau_o)_1\right) - \underline{\theta}_{ims}\left((\tau_o)_1\right)\,\underline{r}'_{ims}$$

$$\underline{D}'_{ims} = \underline{\theta}_{ims}\left((\tau_o)_1\right)$$

$$\underline{r}'_{ims} = \frac{-\sum_{im=1}^{n_{ims}} \frac{1}{\underline{J}_{im}}}{2}$$

Donnons maintenant les valeurs des coefficients $I_{j,k}$ et $J_{j,k}$ qui servent au calcul des intégrales.

1) Termes $\underline{Y}^1_{ims}(\tau_j)$ et $\underline{\theta}^1_{ims}(\tau_j)$

$$I_{j,k} = \int_0^{\delta\tau} \frac{\exp \underline{r}_{1ims}(\eta+\tau_{j-k}) - \exp \underline{r}_{2ims}(\eta+\tau_{j-k})}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} d\eta$$

$$J_{j,k} = \int_0^{\delta\tau} \eta \frac{\exp \underline{r}_{1ims}(\eta+\tau_{j-k}) - \exp \underline{r}_{2ims}(\eta+\tau_{j-k})}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} d\eta$$

(pour $\underline{\theta}^1_{ims}(\tau_j)$ il suffit de changer $\underline{r}_{1ims}$ en $\underline{r}_{3ims}$ et $\underline{r}_{2ims}$ en $\underline{r}_{4ims}$)

$$I_{j,k} = \exp \underline{r}_{1ims}(j-k)\delta\tau \left[\frac{1 - \exp(-\underline{r}_{1ims}\delta\tau)}{\underline{r}_{1ims}(\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims})}\right] - \exp \underline{r}_{2ims}(j-k)\delta\tau \left[\frac{1 - \exp(-\underline{r}_{2ims}\delta\tau)}{\underline{r}_{2ims}(\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims})}\right]$$

$$J_{j,k} = \exp \underline{r}_{1ims}(j-k)\delta\tau \left[\frac{\delta\tau}{\underline{r}_{1ims}(\underline{r}_{1ims}-\underline{r}_{2ims})} - \frac{1 - \exp(\underline{r}_{1ims}\delta\tau)}{(\underline{r}_{1ims})^2(\underline{r}_{1ims}-\underline{r}_{2ims})}\right] - \exp \underline{r}_{2ims}(j-k)\delta\tau \left[\frac{\delta\tau}{\underline{r}_{2ims}(\underline{r}_{1ims}-r_{2ims})} - \frac{1 - \exp(-\underline{r}_{2ims}\delta\tau)}{(\underline{r}_{2ims})^2(\underline{r}_{1ims}-\underline{r}_{2ims})}\right]$$

cas où $\underline{r}_{1ims} = \underline{r}_{2ims} = \underline{r}_{ims}$

$$I_{j,k} = \int_0^{\delta\tau} (\eta+\tau_{j-k})\exp \underline{r}_{ims}(\eta+\tau_{j-k})d\eta$$

$$= \exp \underline{r}_{ims}(j-k)\delta\tau \left[\frac{\delta\tau}{\underline{r}_{ims}} + \frac{\exp(-r_{ims}\delta\tau) - 1}{(\underline{r}_{ims})^2}\right] + (k+1)\delta\tau \frac{\exp(-\underline{r}_{ims}\delta\tau) - 1}{\underline{r}_{ims}} + j\delta\tau \exp \underline{r}_{ims}(j-k)\delta\tau \left[\frac{1 - \exp(-\underline{r}_{ims}\delta\tau)}{\underline{r}_{ims}}\right]$$

$$J_{j,k} = \int_0^{\delta\tau} \eta(\eta+\tau_{j-k}) \exp \underline{r}_{ims} (\eta+\tau_{j-k}) \, d\eta$$

$$= \exp \underline{r}_{ims}(j-k)\delta\tau \left[ \frac{(\delta\tau)^2}{\underline{r}_{ims}} - 2\frac{\delta\tau}{(\underline{r}_{ims})^2} + \frac{2}{(\underline{r}_{ims})^3} \left(1 - \exp(-\underline{r}_{ims}\delta\tau)\right) \right.$$

$$\left. - (k+1)\frac{(\delta\tau)^2}{\underline{r}_{ims}} + (k+1)\frac{\delta\tau}{(\underline{r}_{ims})^2} \left(1 - \exp(-\underline{r}_{ims}\delta\tau)\right) \right]$$

$$+ j\,\delta\tau \exp \underline{r}_{ims}(j-k)\delta\tau \left[ \frac{\delta\tau}{\underline{r}_{ims}} - \frac{1 - \exp(-r_{ims}\delta\tau)}{(\underline{r}_{ims})^2} \right]$$

2) Termes $\underline{Y}^2_{ims}(\tau_j)$ et $\underline{\theta}^2_{ims}(\tau_j)$

$$I_{j,k} = \int_0^{\delta\tau} \frac{\underline{r}_{1ims} \exp \underline{r}_{1ims}(\eta+\tau_{j-k}) - \underline{r}_{2ims} \exp \underline{r}_{2ims}(\eta+\tau_{j-k})}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} \, d\eta$$

$$= \exp \underline{r}_{1ims}(j-k)\delta\tau \left[ \frac{1 - \exp(-r_{1ims}\delta\tau)}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} \right]$$

$$- \exp \underline{r}_{2ims}(j-k)\delta\tau \left[ \frac{1 - \exp(-\underline{r}_{2ims}\delta\tau)}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} \right]$$

$$J_{j,k} = \int_0^{\delta\tau} \eta \, \frac{\underline{r}_{1ims} \exp \underline{r}_{1ims}(\eta+\tau_{j-k}) - \underline{r}_{2ims} \exp \underline{r}_{2ims}(\eta+\tau_{j-k})}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} \, d\eta$$

$$= \exp \underline{r}_{1ims}(j-k)\,\delta\tau \left[ \frac{\delta\tau}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} - \frac{1 - \exp(-\underline{r}_{1ims}\delta\tau)}{\underline{r}_{1ims}(\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims})} \right]$$

$$- \exp \underline{r}_{2ims}(j-k)\,\delta\tau \left[ \frac{\delta\tau}{\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims}} - \frac{1 - \exp(-\underline{r}_{2ims}\delta\tau)}{\underline{r}_{2ims}(\underline{r}_{1ims} - \underline{r}_{2ims})} \right]$$

Cas où $\underline{r}_{1ims} = \underline{r}_{2ims} = \underline{r}_{ims}$

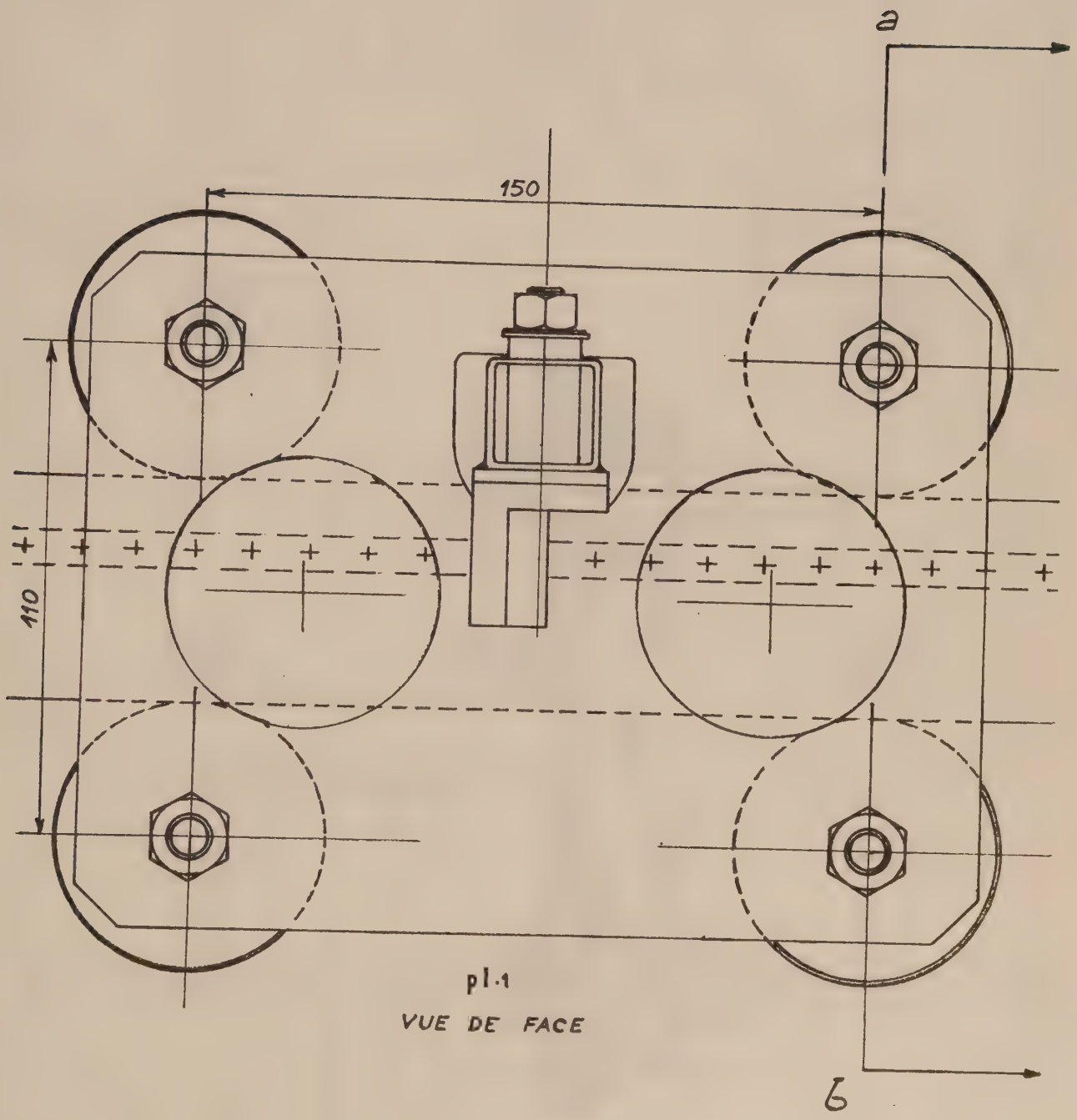
$$I_{j,k} = \exp \underline{r}_{ims}(j-k)\delta\tau \left[\delta\tau + (k+1)\delta\tau \left(\exp\left(-\underline{r}_{ims}\delta\tau\right) - 1\right)\right]$$
$$+ j\,\delta\tau \exp \underline{r}_{ims}(j-k)\delta\tau \left[1 - \exp\left(-\underline{r}_{ims}\delta\tau\right)\right]$$

$$J_{j,k} = \exp \underline{r}_{ims}(j-k)\delta\tau \left[(\delta\tau)^2 - \frac{\delta\tau}{\underline{r}_{ims}} + \frac{1 - \exp\left(-\underline{r}_{ims}\delta\tau\right)}{\left(\underline{r}_{ims}\right)^2}\right.$$
$$\left. - (k+1)\,(\delta\tau)^2 + (k+1)\,\frac{\delta\tau}{\underline{r}_{ims}}\left(1 - \exp\left(-\underline{r}_{ims}\delta\tau\right)\right)\right]$$
$$+ j\,\delta\tau \exp \underline{r}_{ims}(j-k)\delta\tau \left[\delta\tau - \frac{1 - \exp\left(-\underline{r}_{ims}\right)}{\underline{r}_{ims}}\right]$$

(même remarque que précédemment pour $\underline{\theta}^2_{ims}(\tau_j)$ )

# ANNEXE 7

## PLANCHES DE RESULTATS

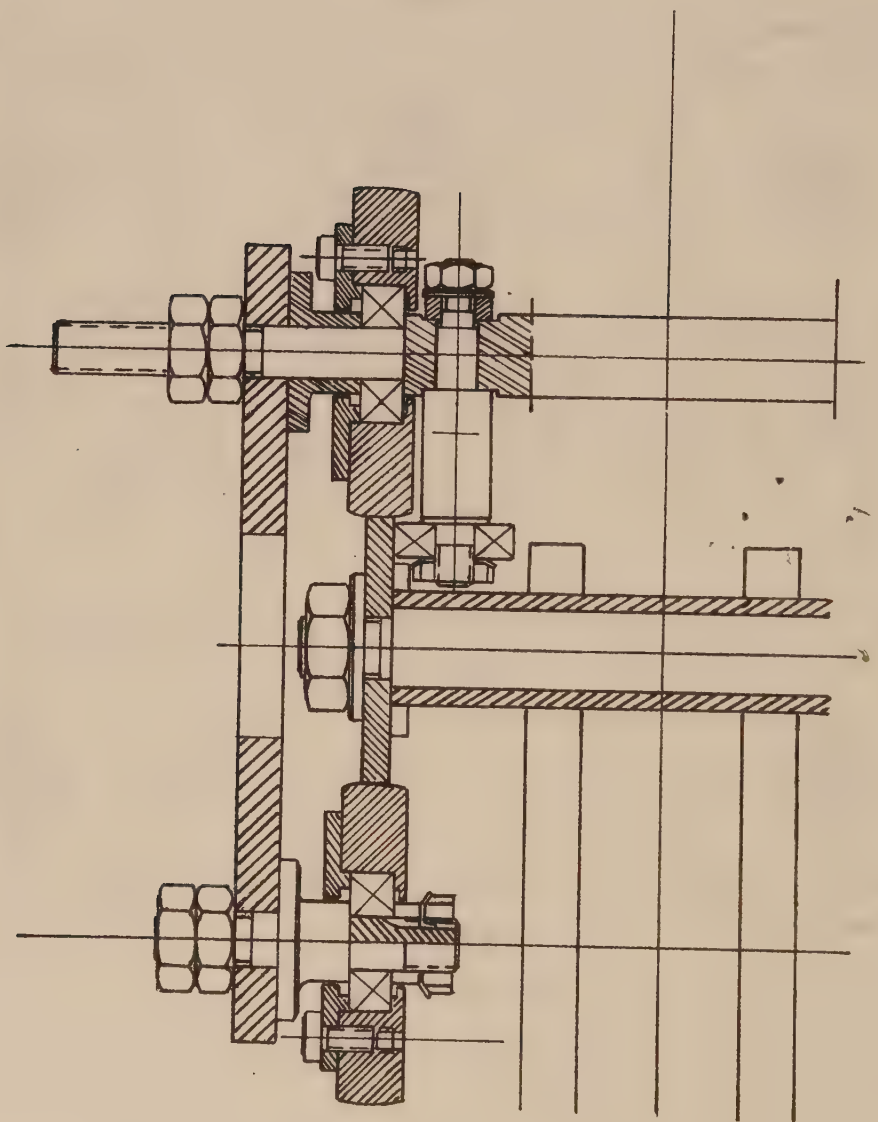


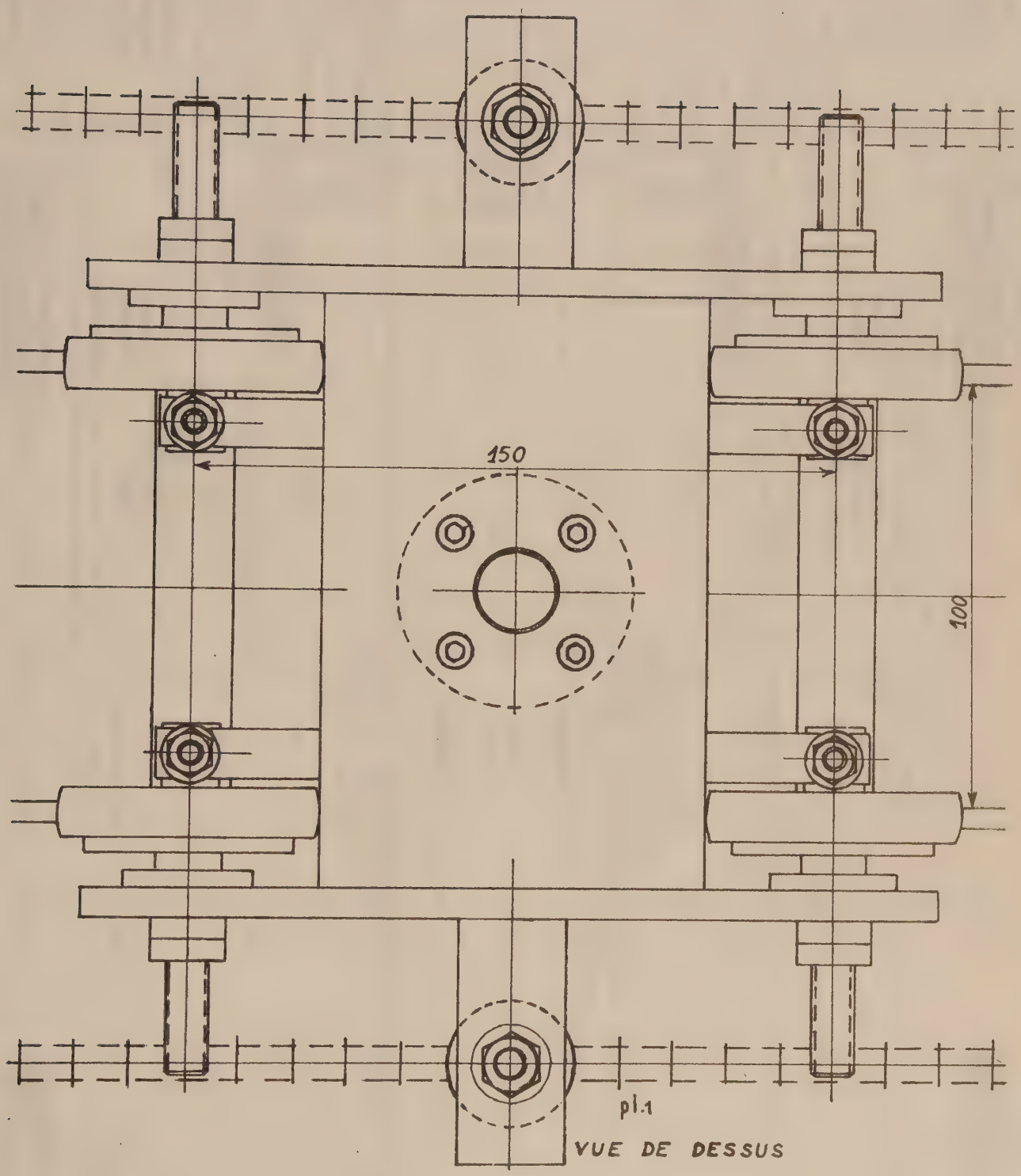

pl.1

VUE DE FACE

## 1/2 Coupe a b

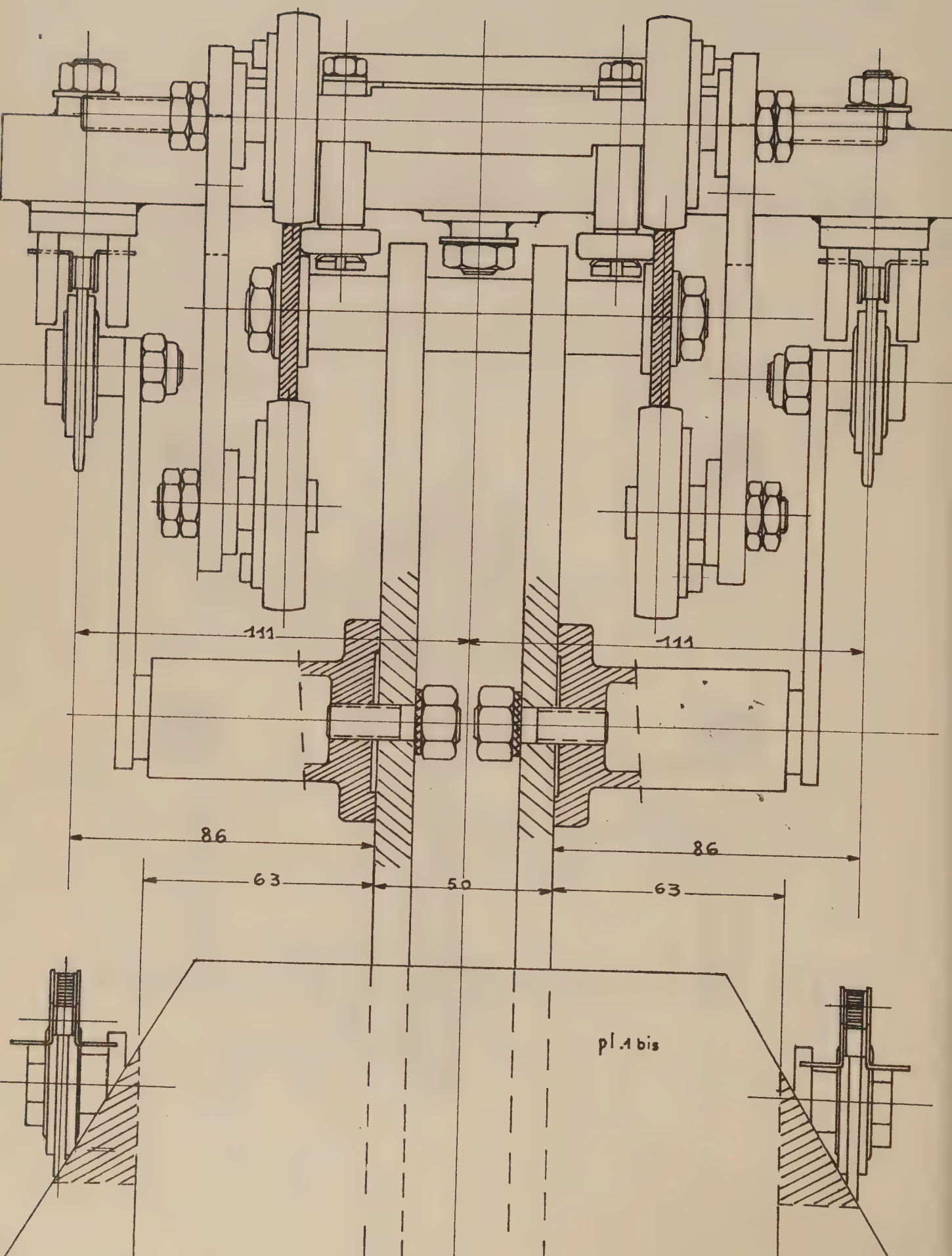
pl.1

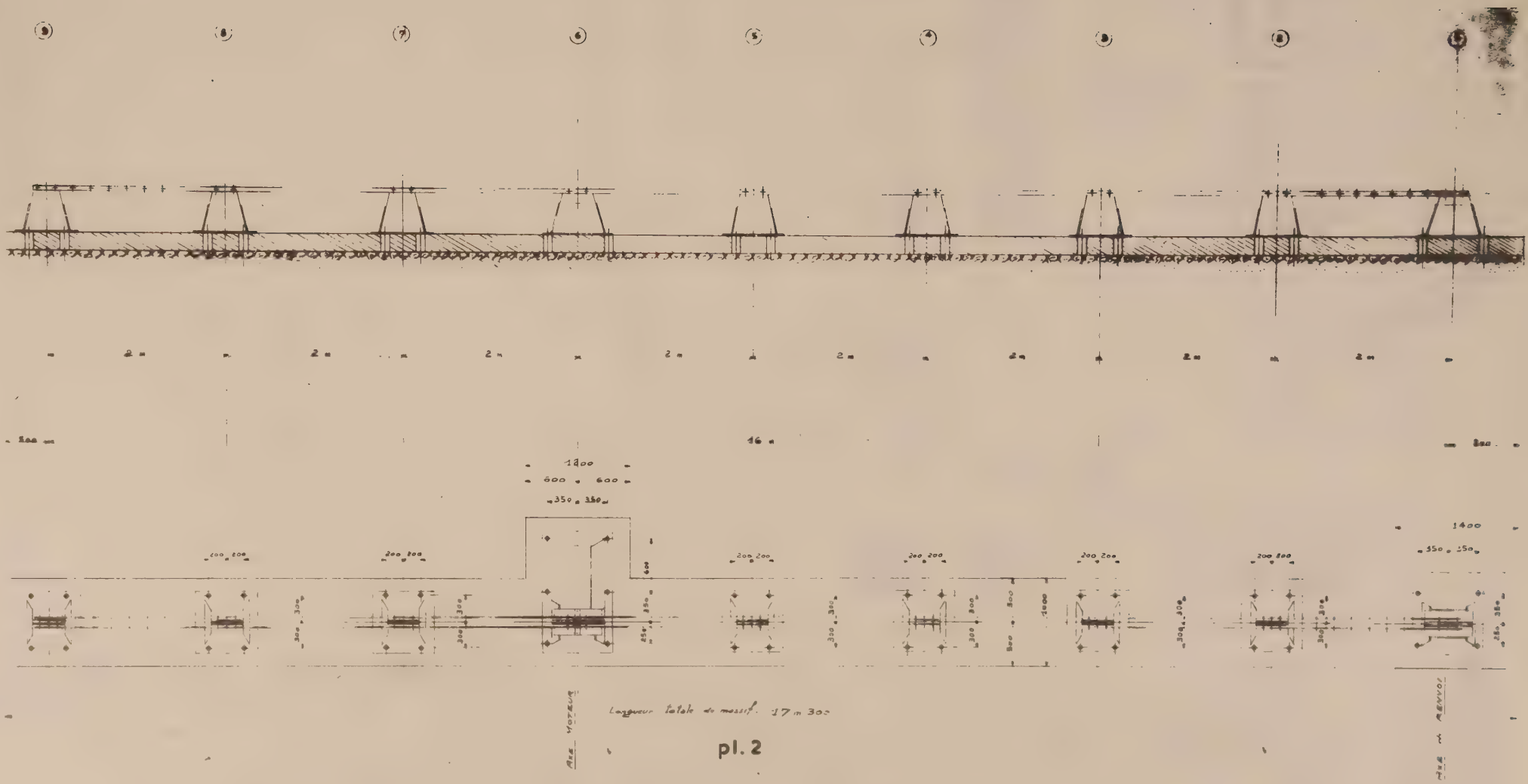





pl.1

VUE DE DESSUS


111
111
86
86
63
50
63
pl.1 bis

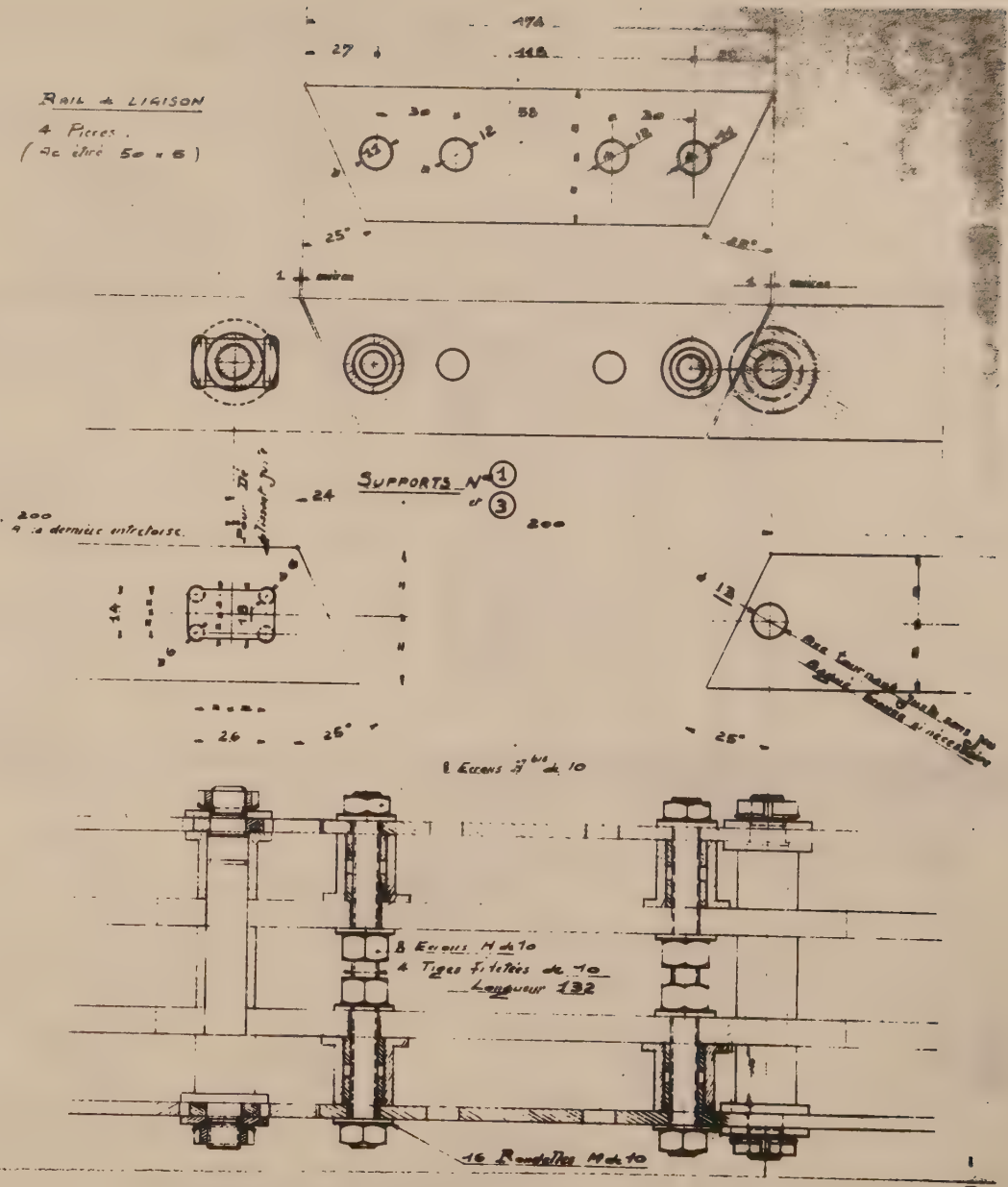


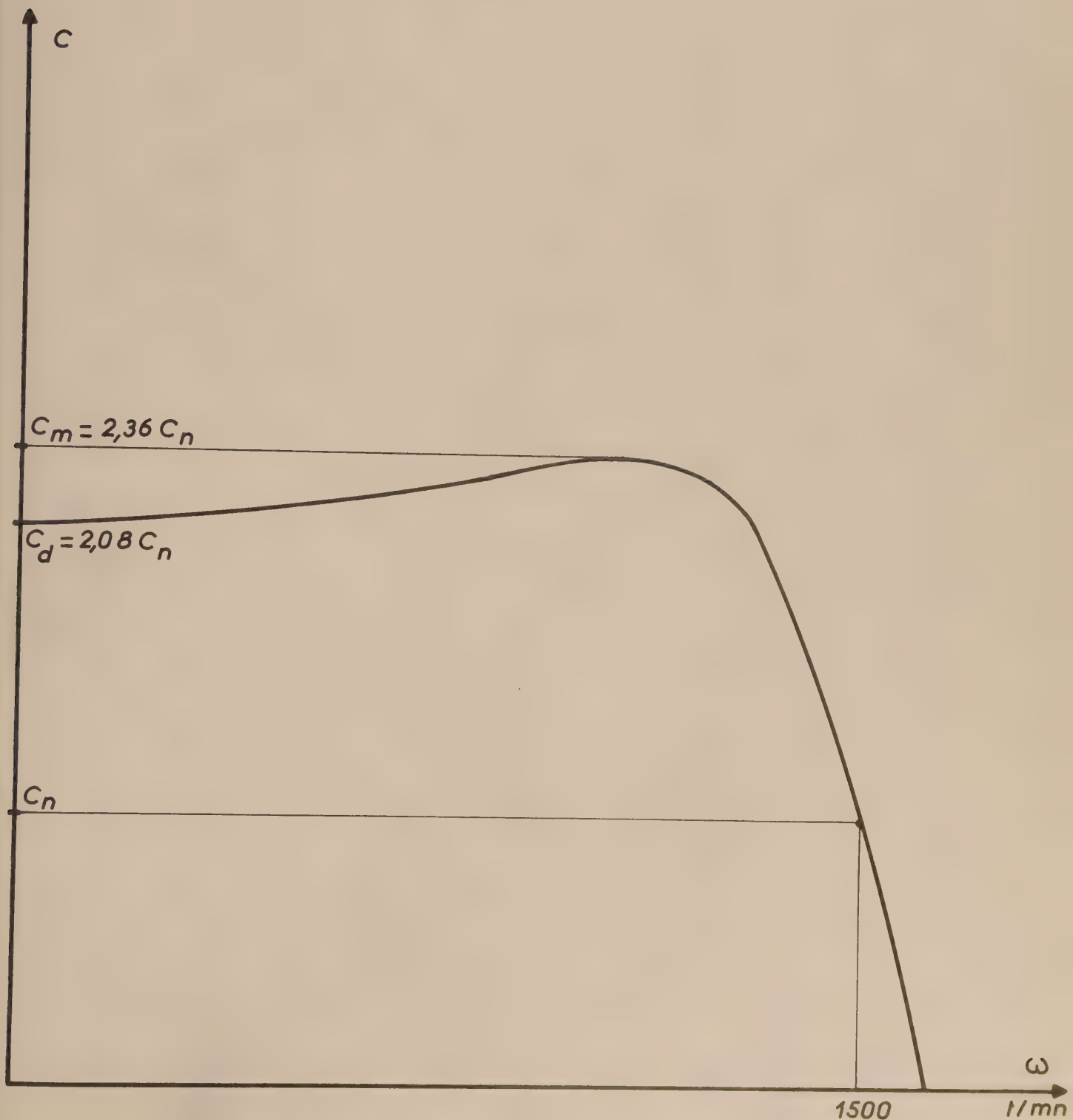

Longueur totale du massif : 17 m 30

pl. 2

SUPPORT N° 4
22,5 22,5
22,5 22,5
Ø 12
Ø 12
30 45 60 45 30
200
13
Axe tournant juste sans jeu

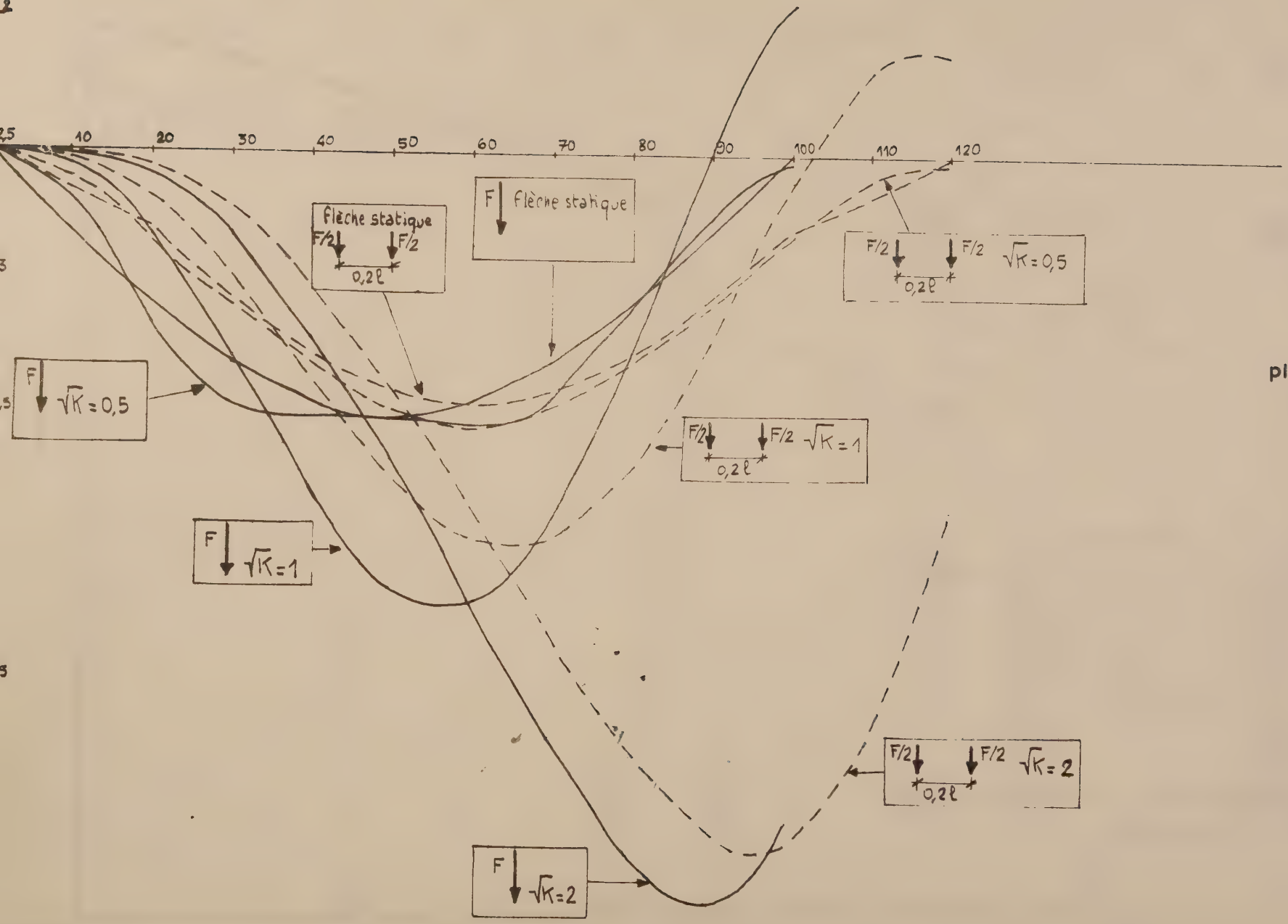
pl. 3


RAIL de LIAISON
4 Pièces.
(Acier 50 x 6)
474
27
112
30
58
12
18
25°
1 mini
SUPPORTS N° 1 et 3
200
24
26
25°
14
Ø 12
8 Ecrous H de 10
8 Ecrous H de 10
4 Tiges filetées de 10
Longueur 132
16 Rondelles M de 10

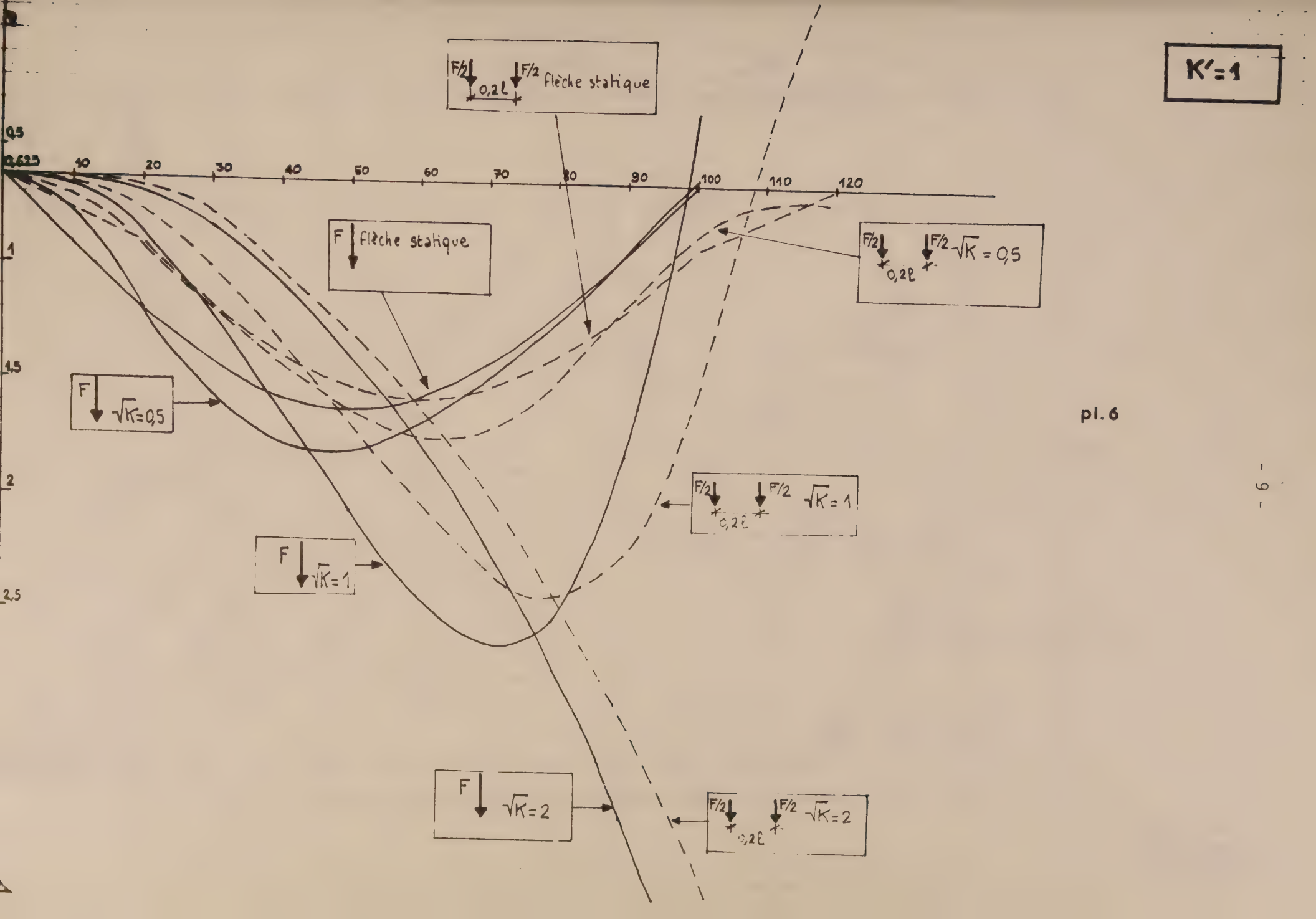



pl.4

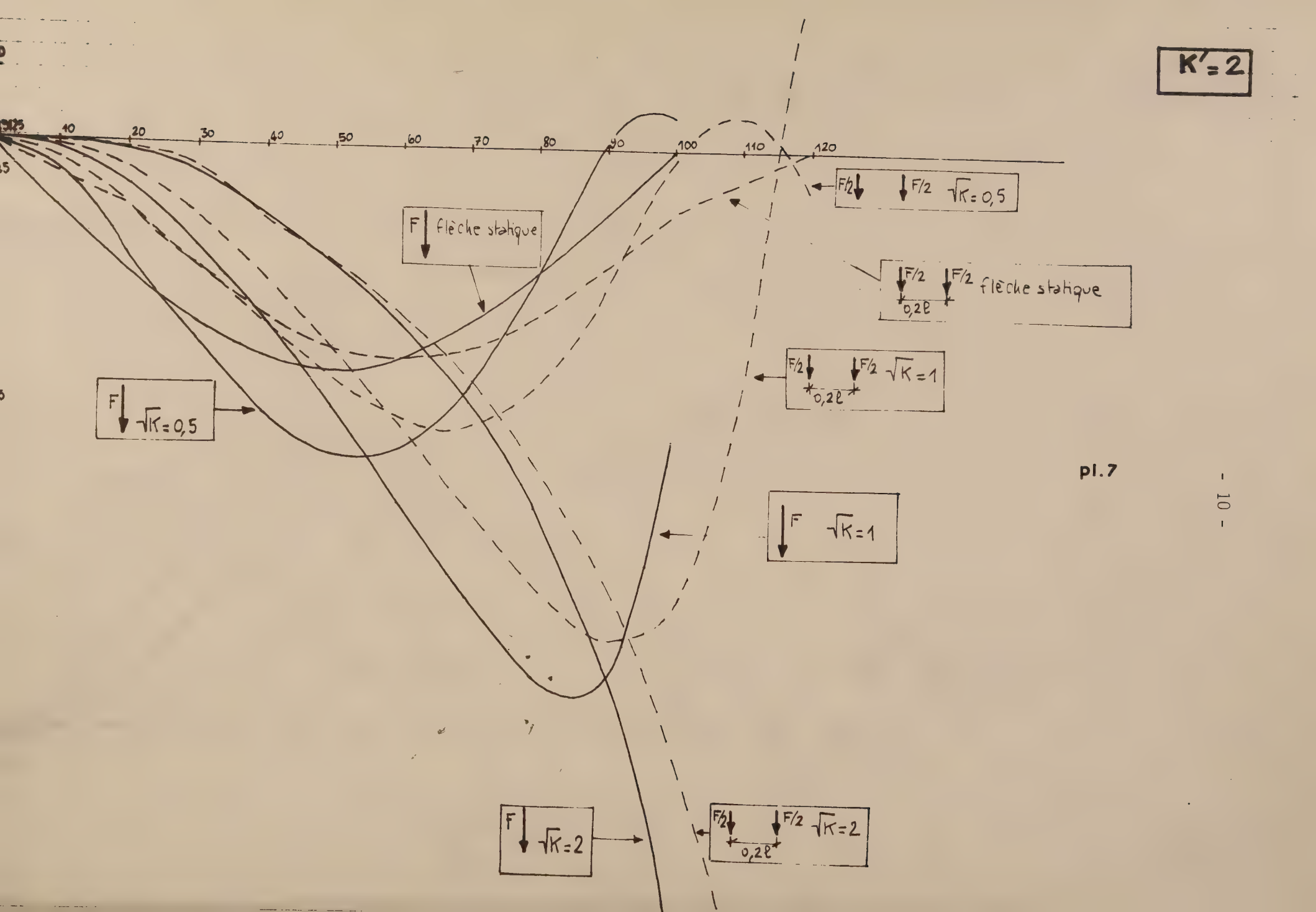
$K' = 0{,}25$

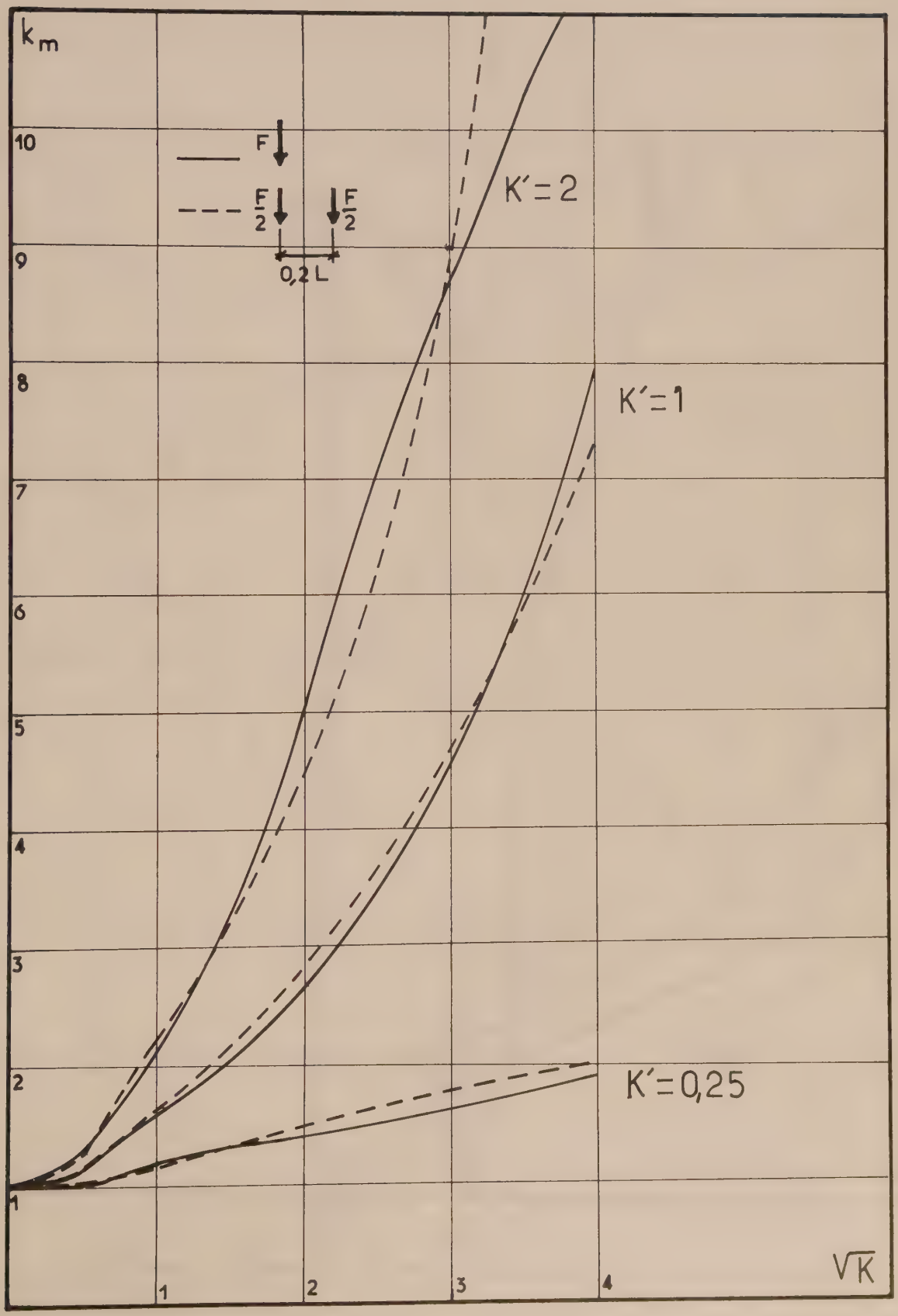

10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
Flèche statique
F/2
F/2
0,2ℓ
F
Flèche statique
F/2
F/2
√K = 0,5
0,2ℓ
F
√K = 0,5
F/2
F/2
√K = 1
0,2ℓ
F
√K = 1
F/2
F/2
√K = 2
0,2ℓ
F
√K = 2

pl. 5

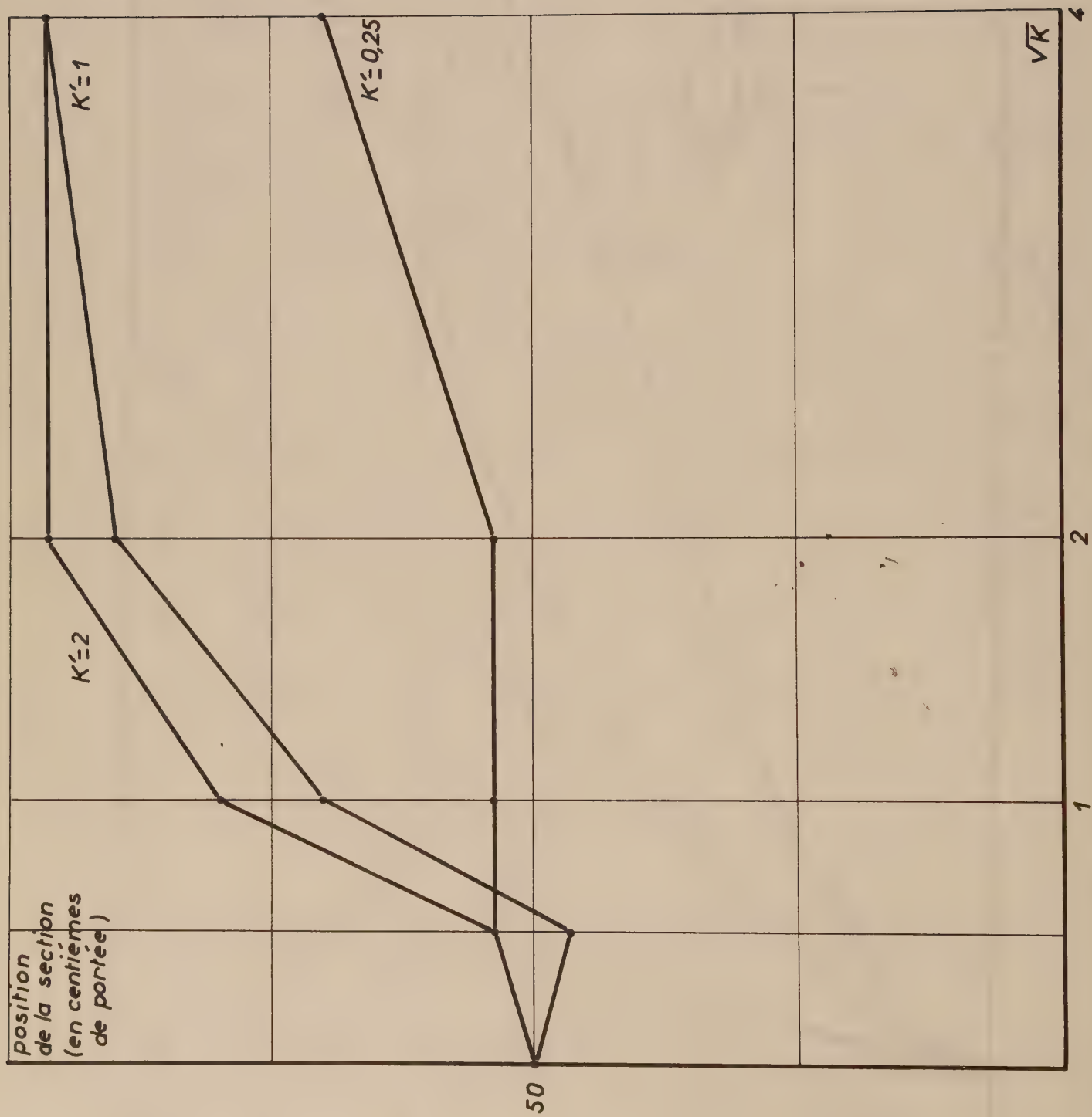

K'=1
F/2 0,2ℓ F/2 flèche statique
F flèche statique
F/2 0,2ℓ F/2 √K = 0,5
F √K=0,5
F/2 0,2ℓ F/2 √K = 1
F √K=1
F √K=2
F/2 0,2ℓ F/2 √K=2
0,5
0,623
1
1,5
2
2,5
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120

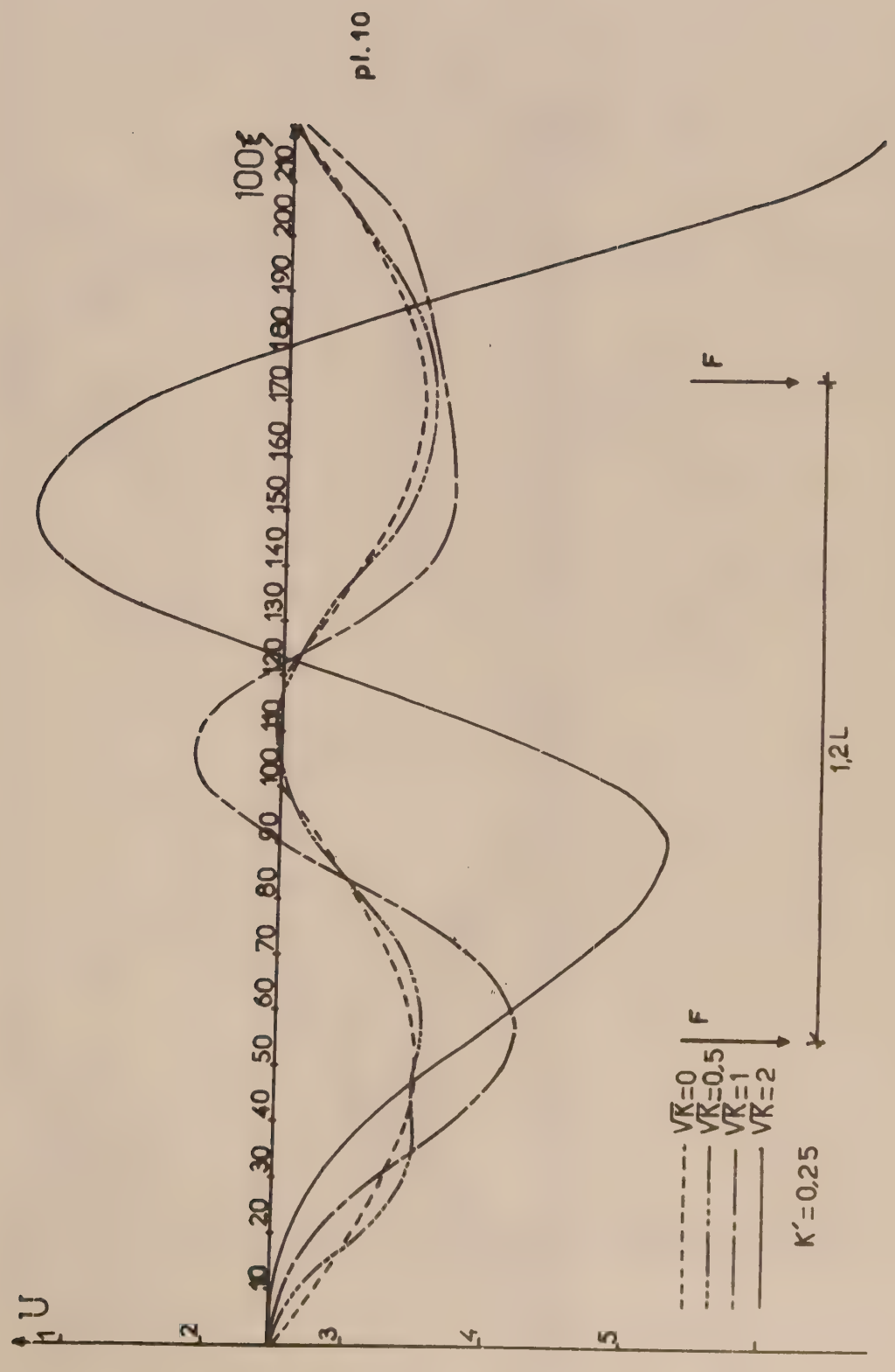
pl. 6

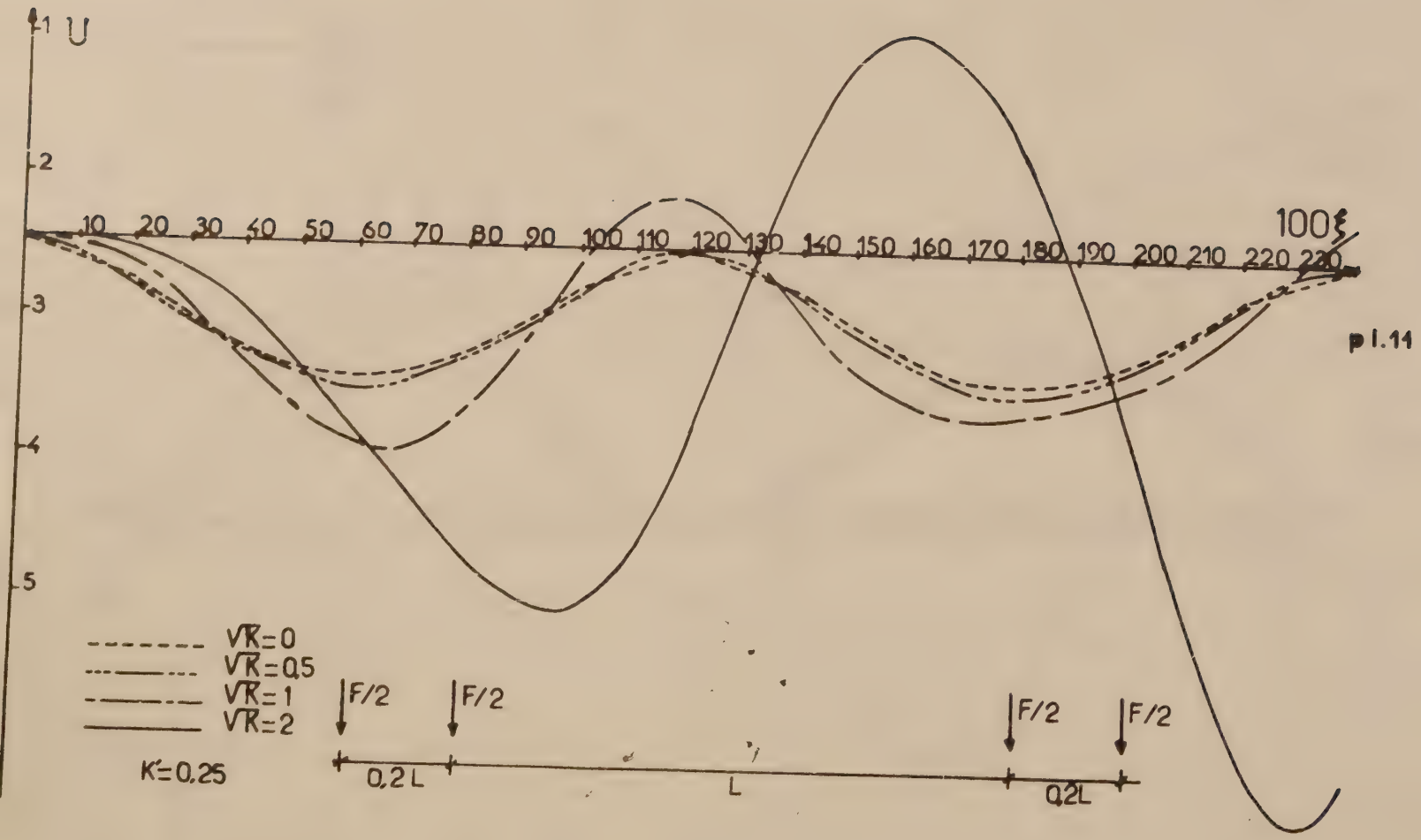

K'=2
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
F flèche statique
F √K=0,5
F/2 F/2 √K=0,5
F/2 F/2 flèche statique
0,2ℓ
F/2 F/2 √K=1
0,2ℓ
F √K=1
F √K=2
F/2 F/2 √K=2
0,2ℓ
pl.7
- 10 -

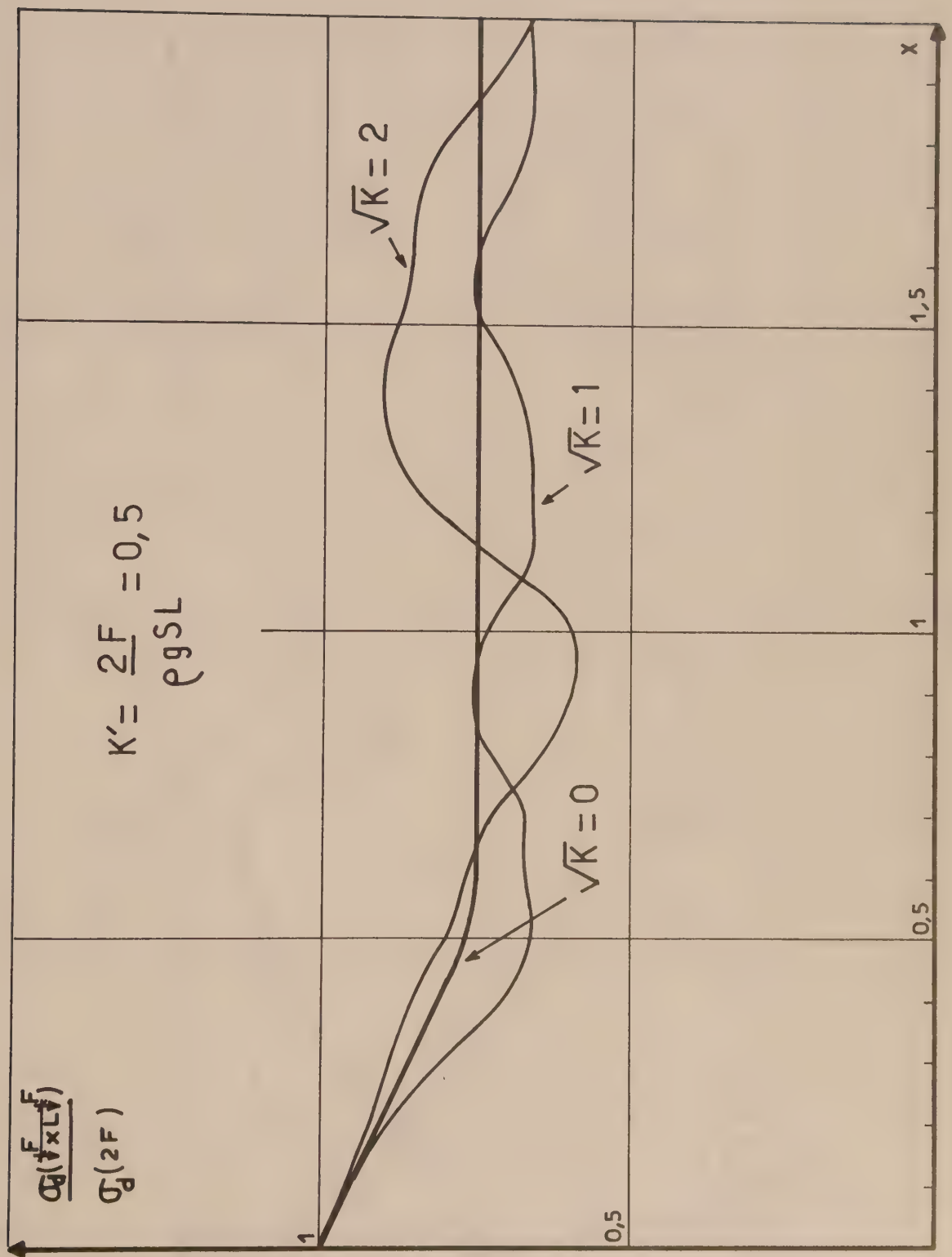

$k_m$
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
F
$\frac{F}{2}$
$\frac{F}{2}$
0,2 L
K'=2
K'=1
K'=0,25
1
2
3
4
$\sqrt{K}$

pl.9

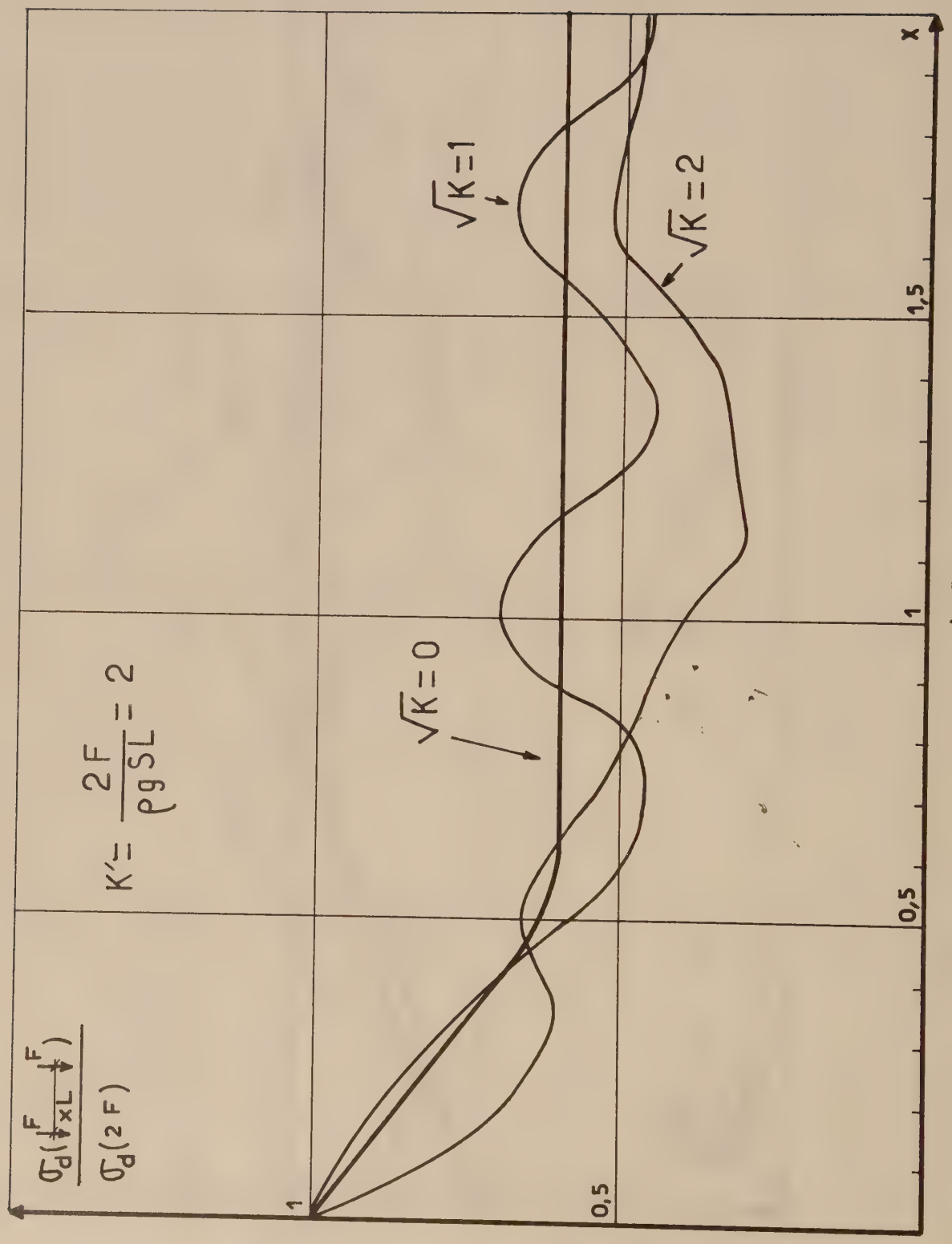

position de la section (en centièmes de portée)
50
1
2
4
√K
K'=2
K'=1
K'=0,25


pl.10
100ξ
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210
1 U
2
3
4
5
F
1,2L
F
VR=0
VR=0,5
VR=1
VR=2
K'=0,25

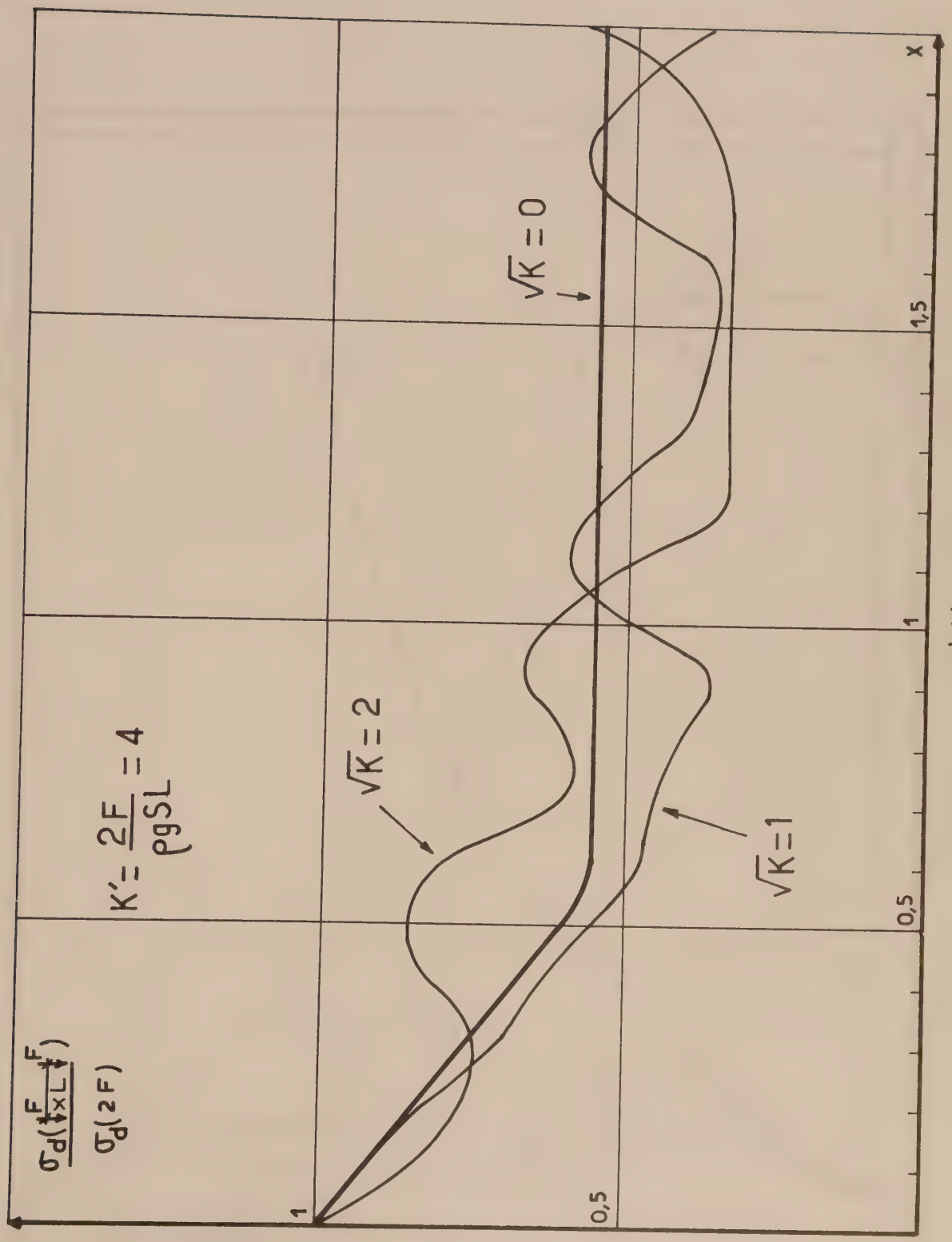

U
1
2
3
4
5
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210 220 230
100ξ
p I.11
VR=0
VR=0,5
VR=1
VR=2
K=0,25
F/2
F/2
F/2
F/2
0,2 L
L
0,2L


$\frac{\sigma_d(\frac{F}{l}\times L\frac{F}{l})}{\sigma_d(2F)}$
$K' = \frac{2F}{\rho g S L} = 0,5$
$\sqrt{K} = 2$
$\sqrt{K} = 1$
$\sqrt{K} = 0$
1
0,5
0,5
1
1,5
x

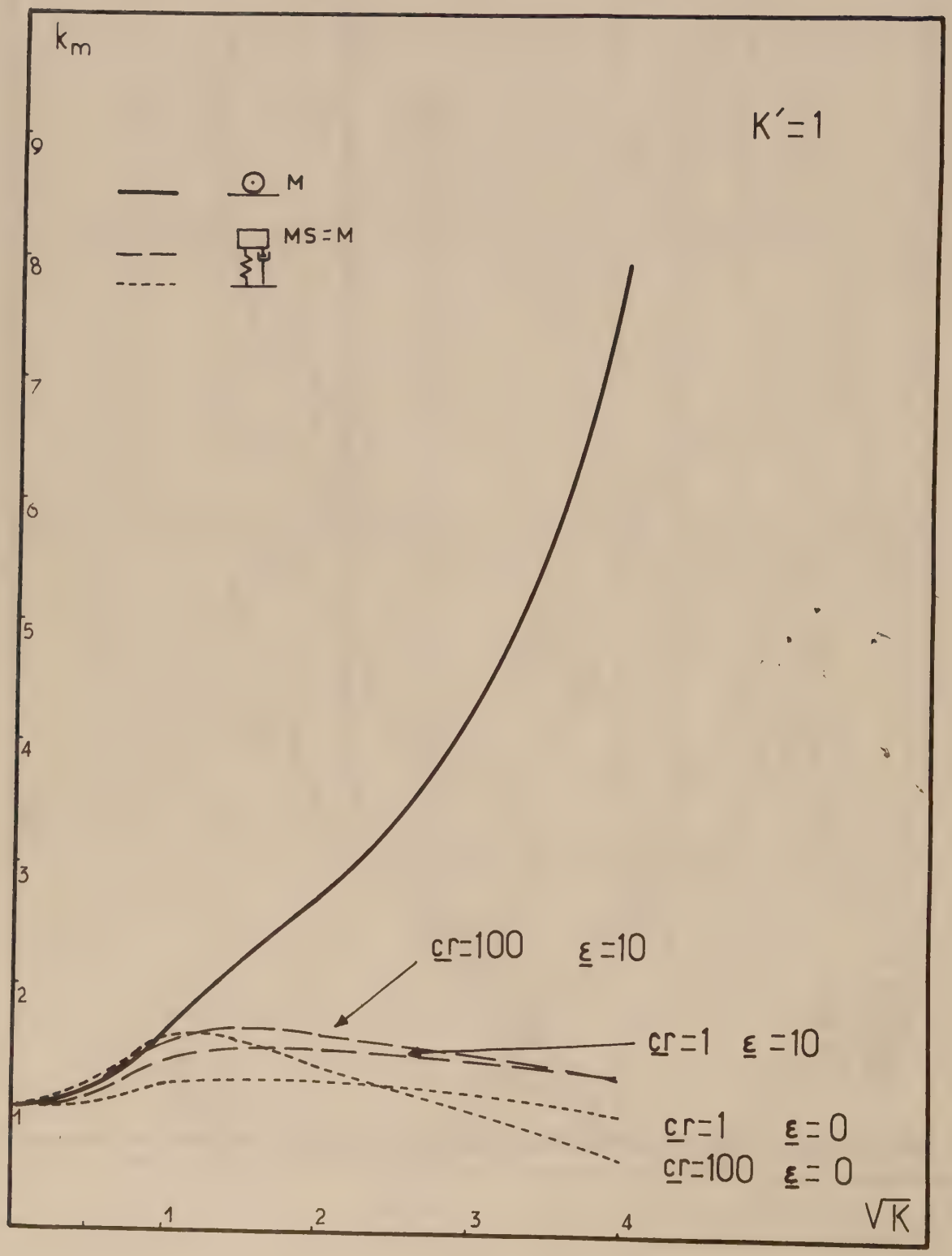
Pl.12


$\frac{\sigma_d(\downarrow\frac{F}{xL}\downarrow F)}{\sigma_d(2F)}$
$K' = \frac{2F}{\rho g SL} = 2$
$\sqrt{K}=0$
$\sqrt{K}=1$
$\sqrt{K}=2$
1
0,5
0,5
1
1,5
x

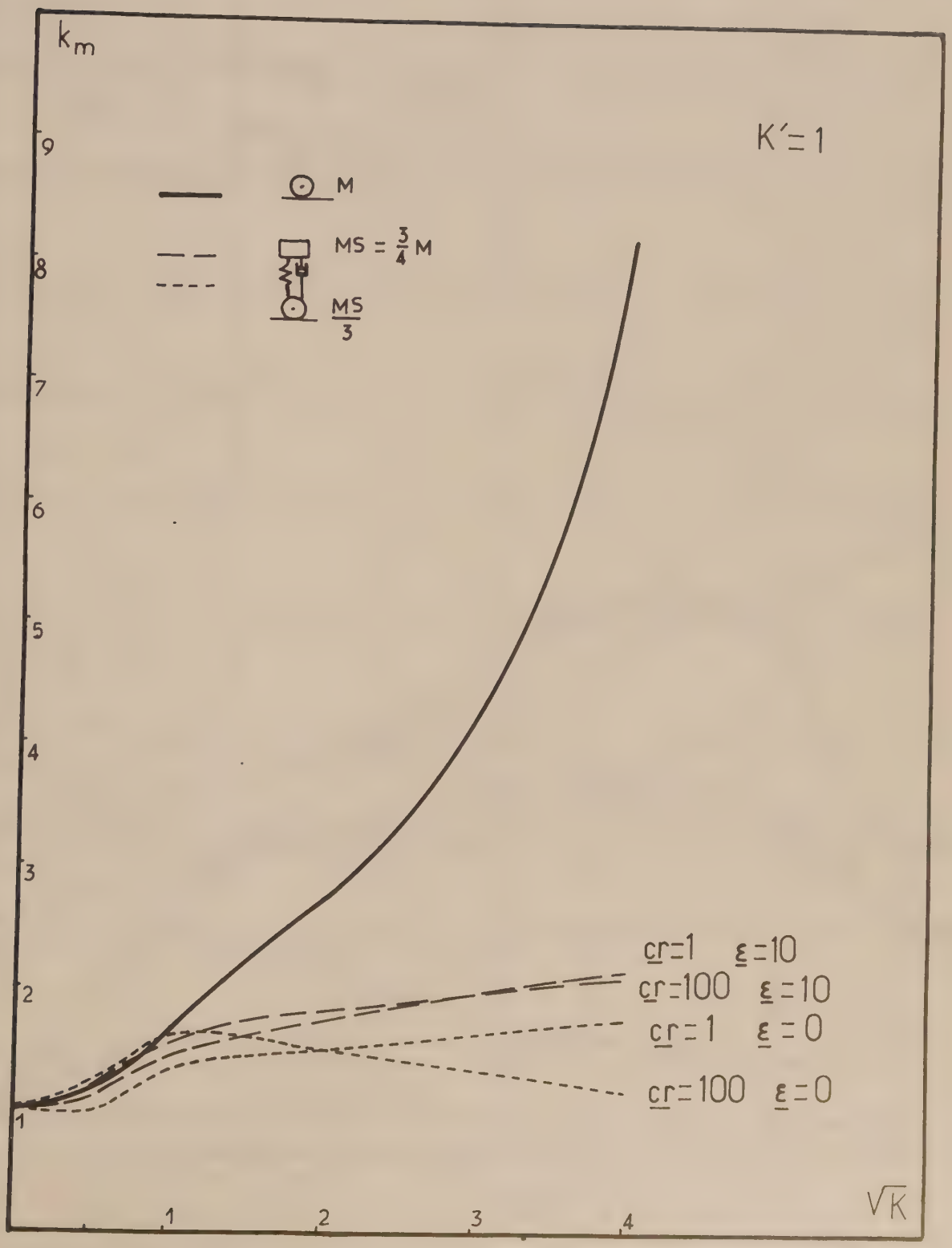
Pl.13


$\frac{\sigma_d(\frac{F}{x}, \frac{F}{L-x})}{\sigma_d(2F)}$
$K' = \frac{2F}{\rho g S L} = 4$
$\sqrt{K} = 0$
$\sqrt{K} = 2$
$\sqrt{K} = 1$
1
0,5
0,5
1
1,5
x

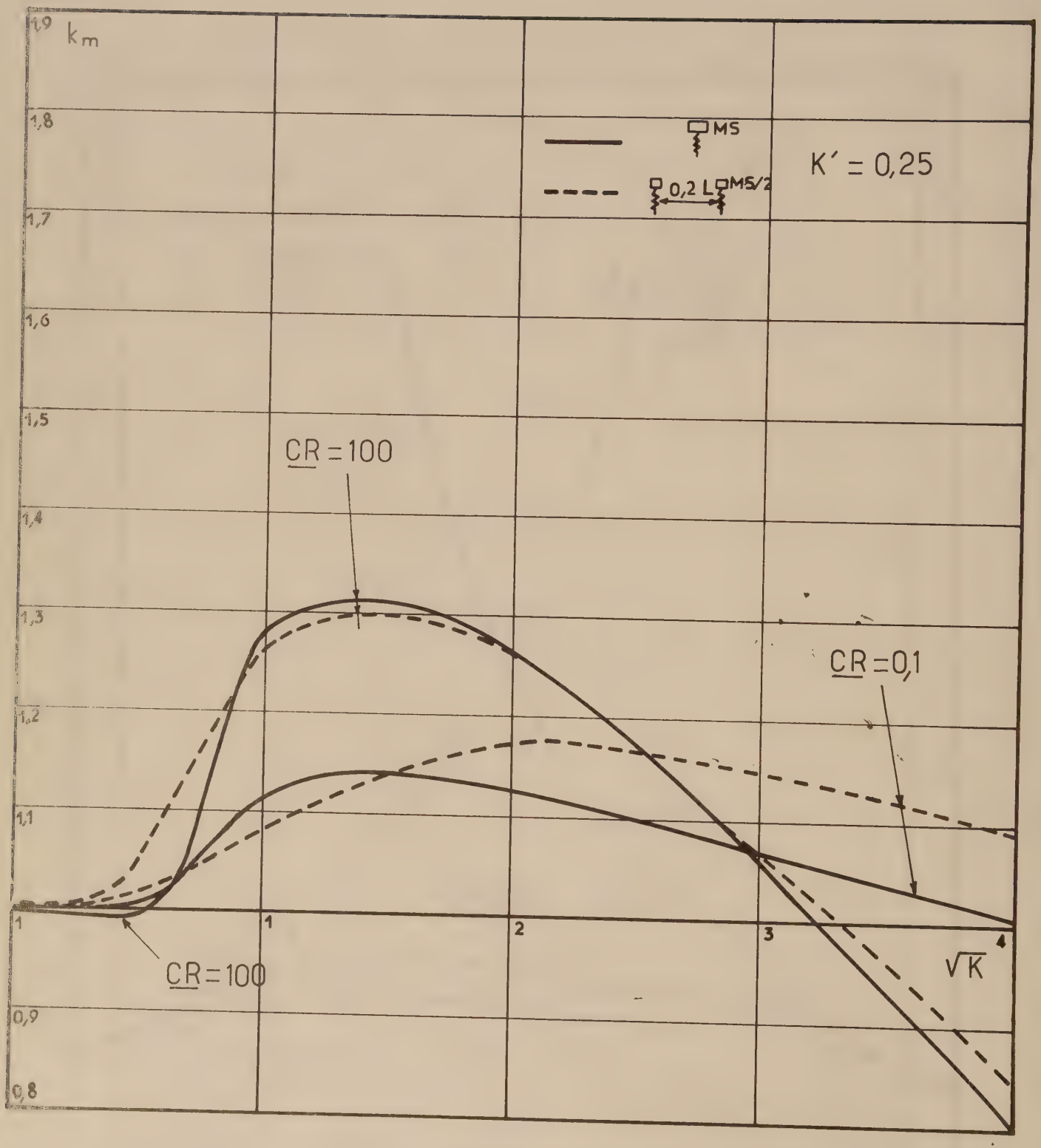
pl.14



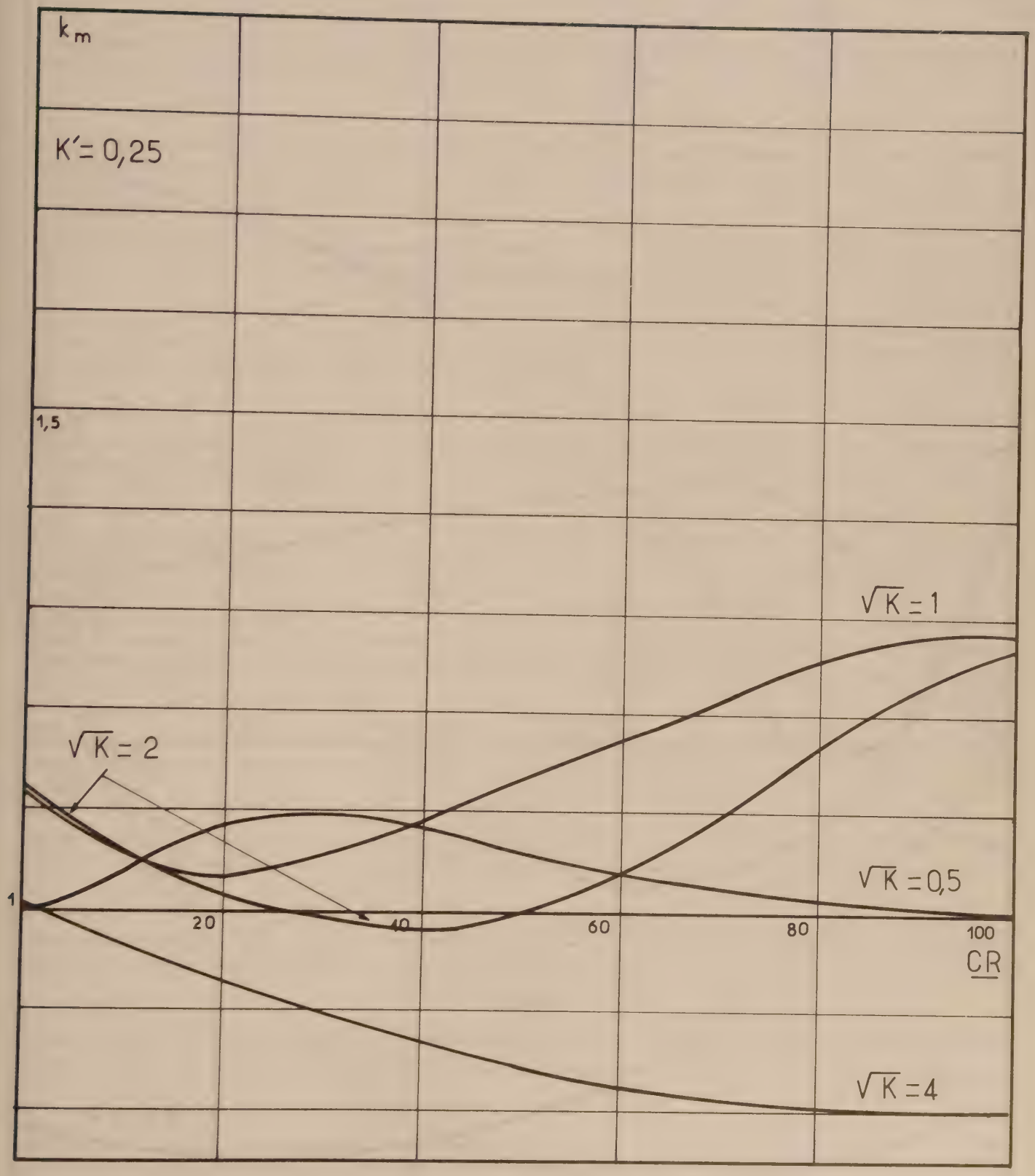

pl.15


$k_m$
K'=1
M
MS = $\frac{3}{4}$ M
$\frac{MS}{3}$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
cr=1 ε=10
cr=100 ε=10
cr=1 ε=0
cr=100 ε=0
1
2
3
4
$\sqrt{K}$

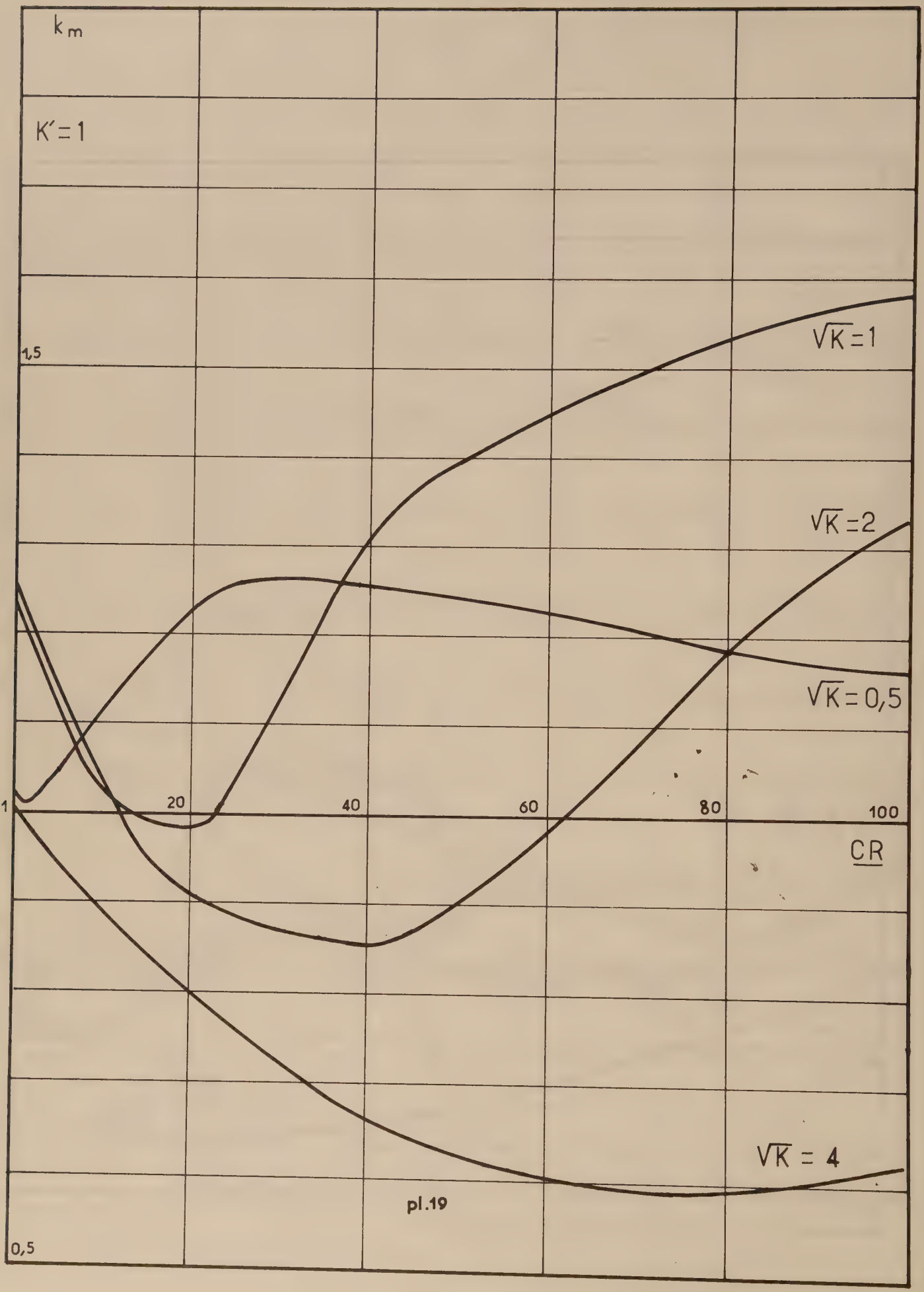
pl.16


km
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
0,9
0,8
MS
0,2 L MS/2
K' = 0,25
CR = 100
CR = 0,1
CR = 100
1
1
2
3
4
√K

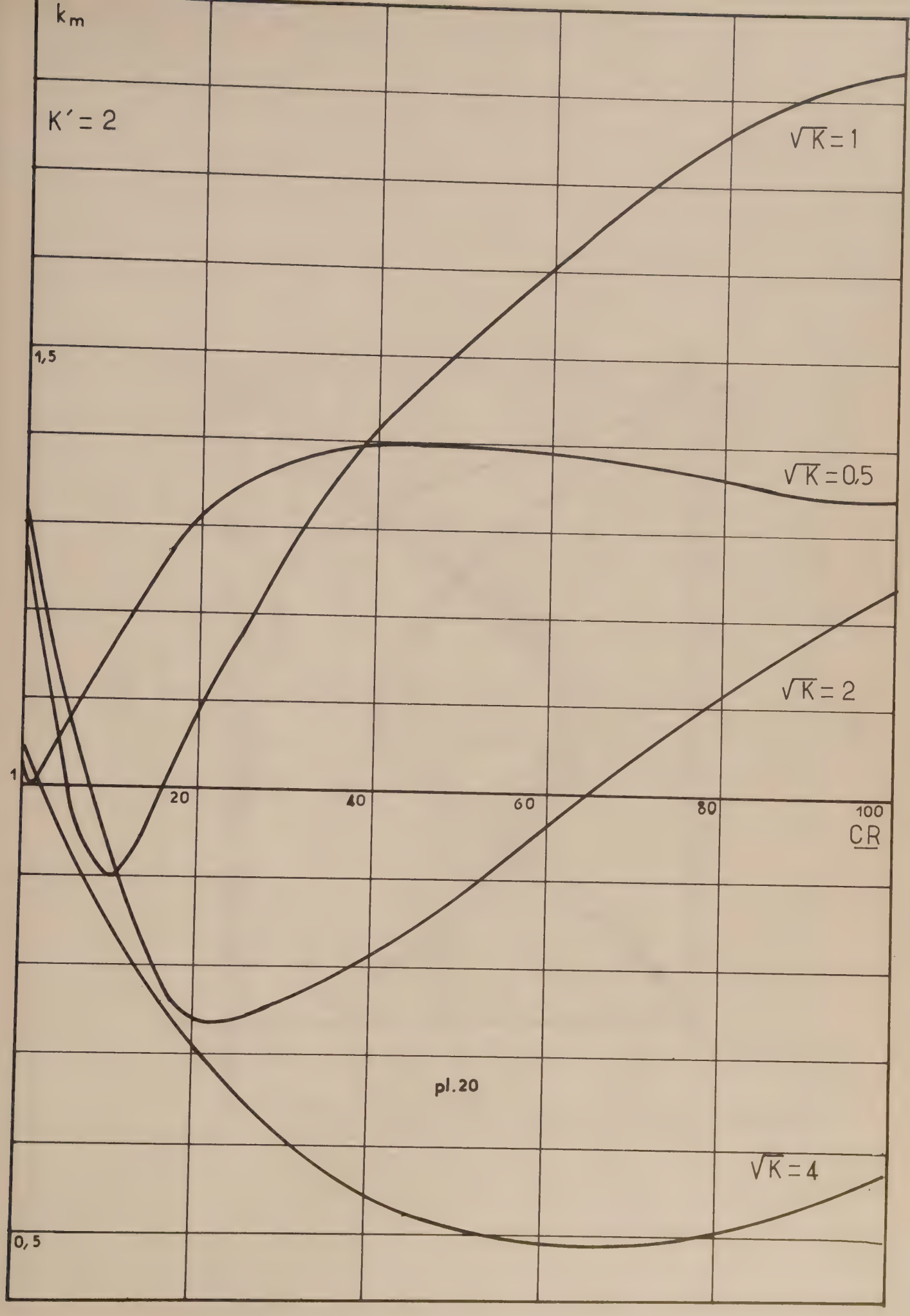
pl. 17

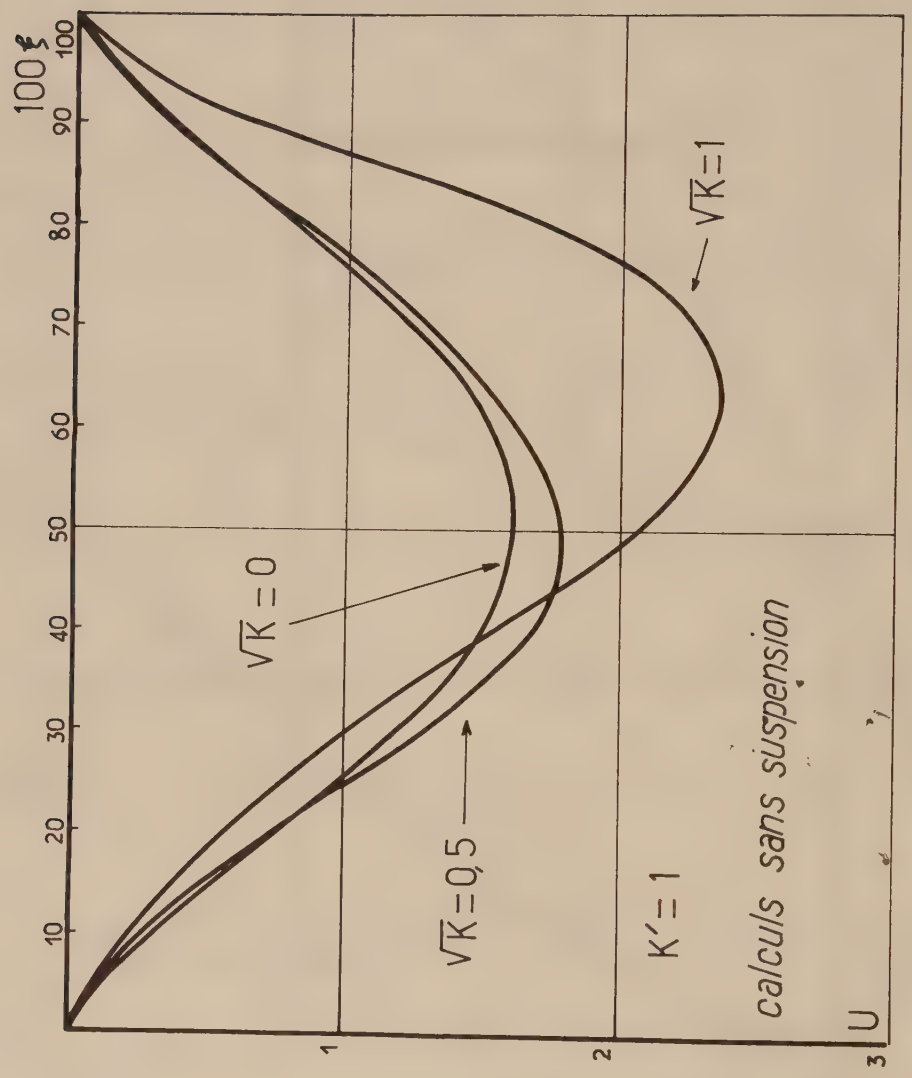



pl.18

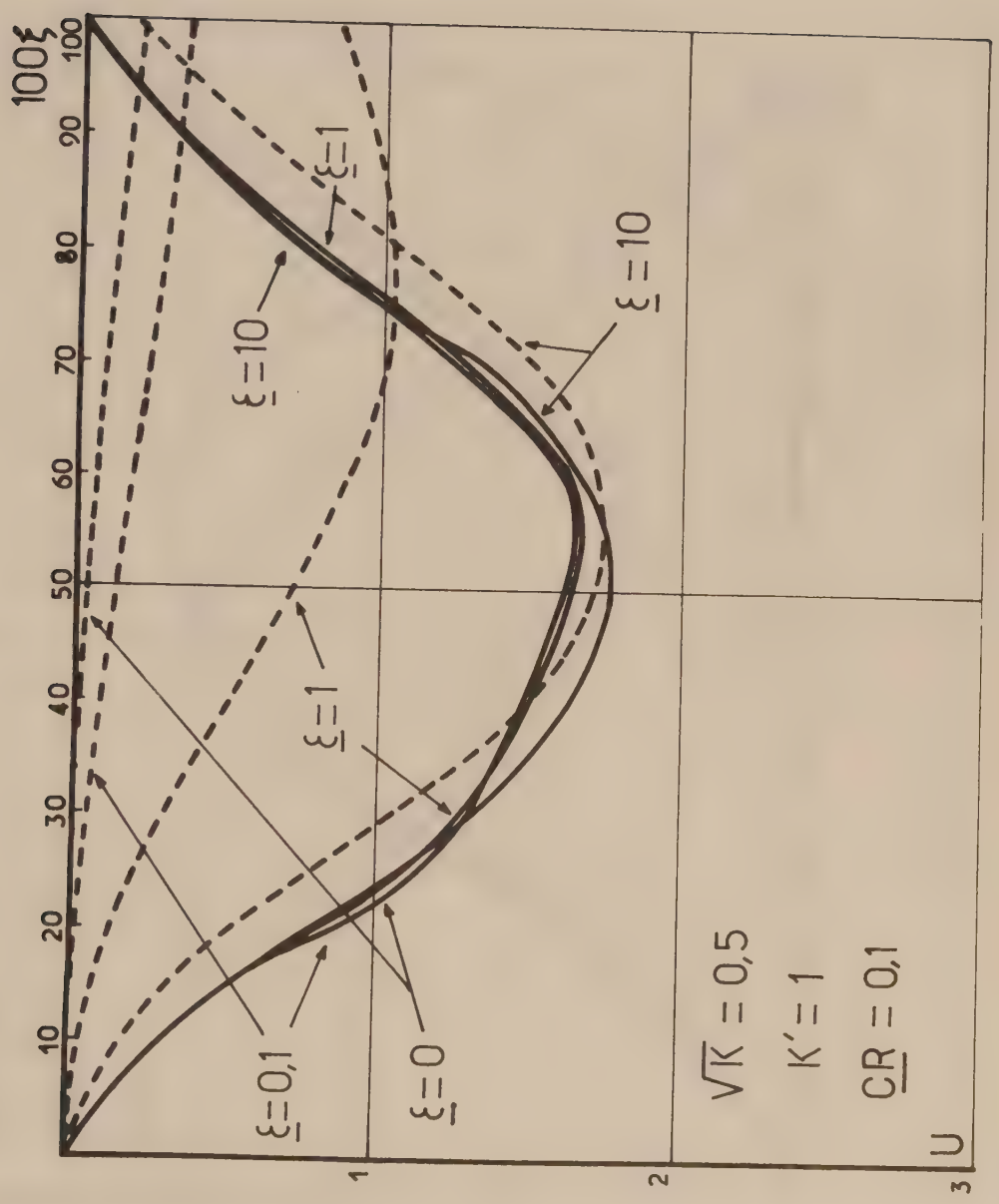



pl.19

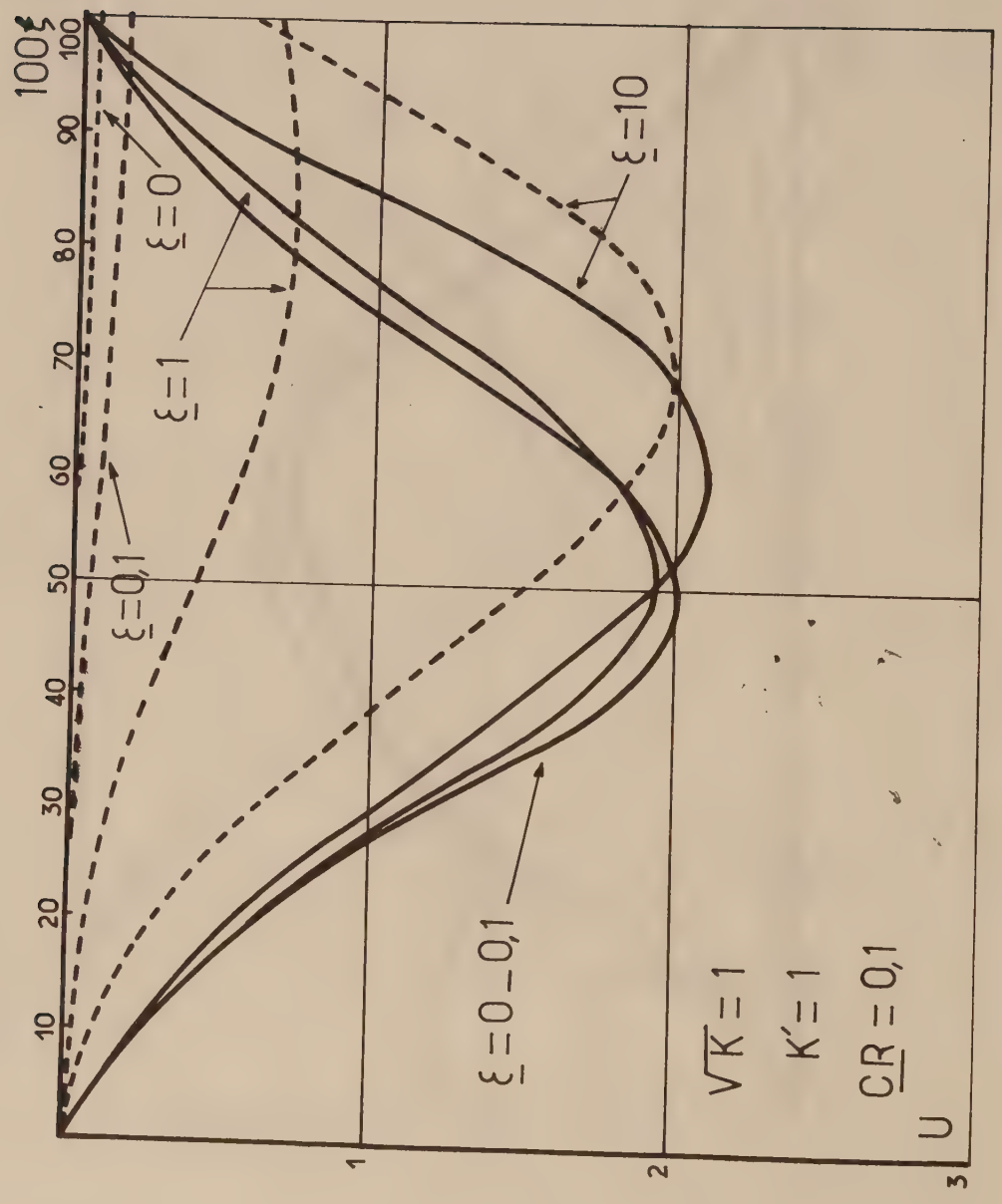

$k_m$
K′ = 2
√K = 1
1,5
√K = 0,5
√K = 2
1
20
40
60
80
100
CR
pl.20
√K = 4
0,5


100 ξ
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
$\sqrt{K}=0$
$\sqrt{K}=0,5$
$\sqrt{K}=1$
K'=1
calculs sans suspension
1
2
3
U

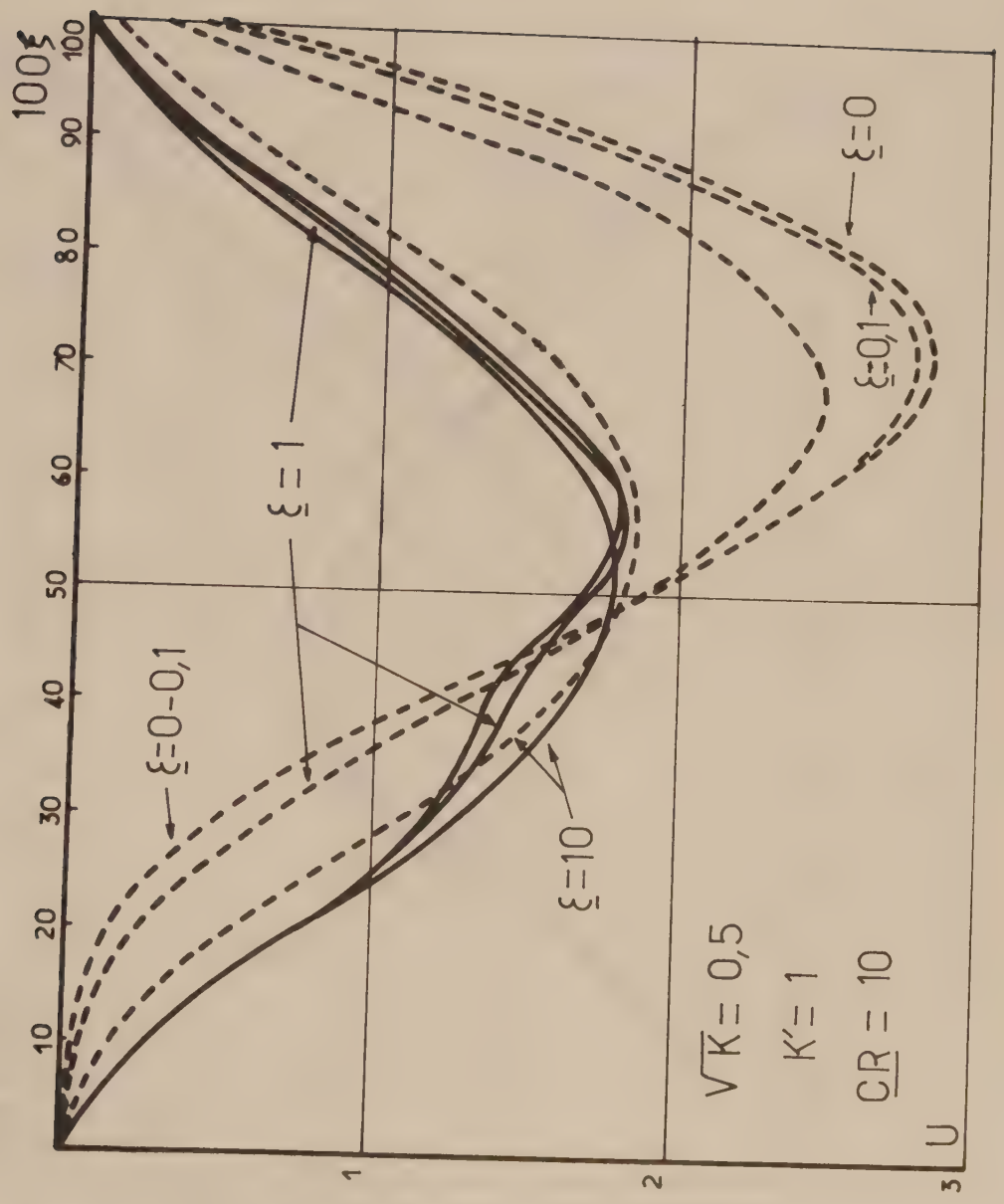
pl.21


100ξ
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
ξ=0,1
ξ=0
ξ=1
ξ=10
ξ=1
ξ=10
√K = 0,5
K' = 1
CR = 0,1
U
1
2
3

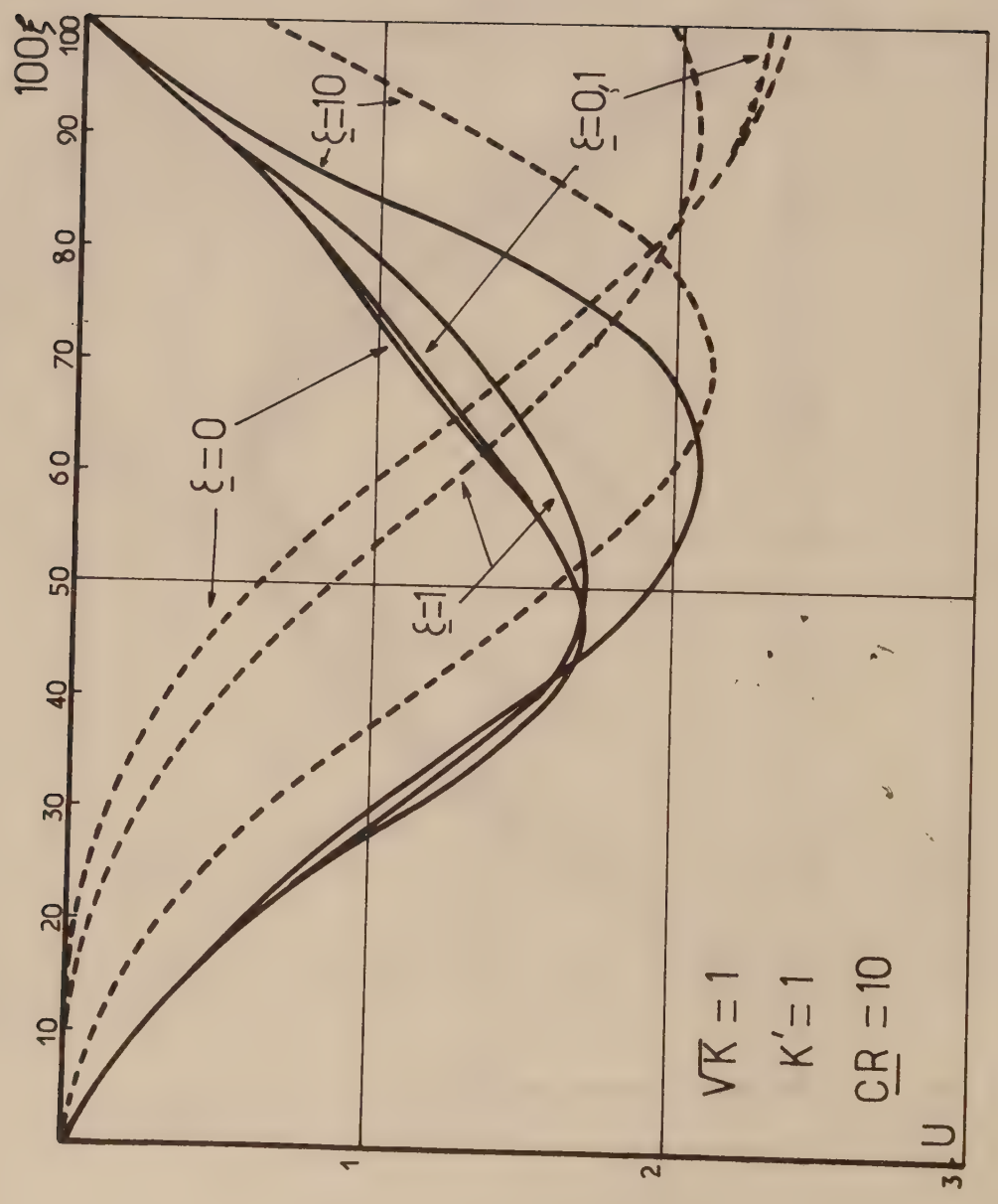
pl. 22


100%
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
ξ=0
ξ=0,1
ξ=1
ξ=10
ξ=0_0,1
√K=1
K'=1
CR=0,1
U
1
2
3

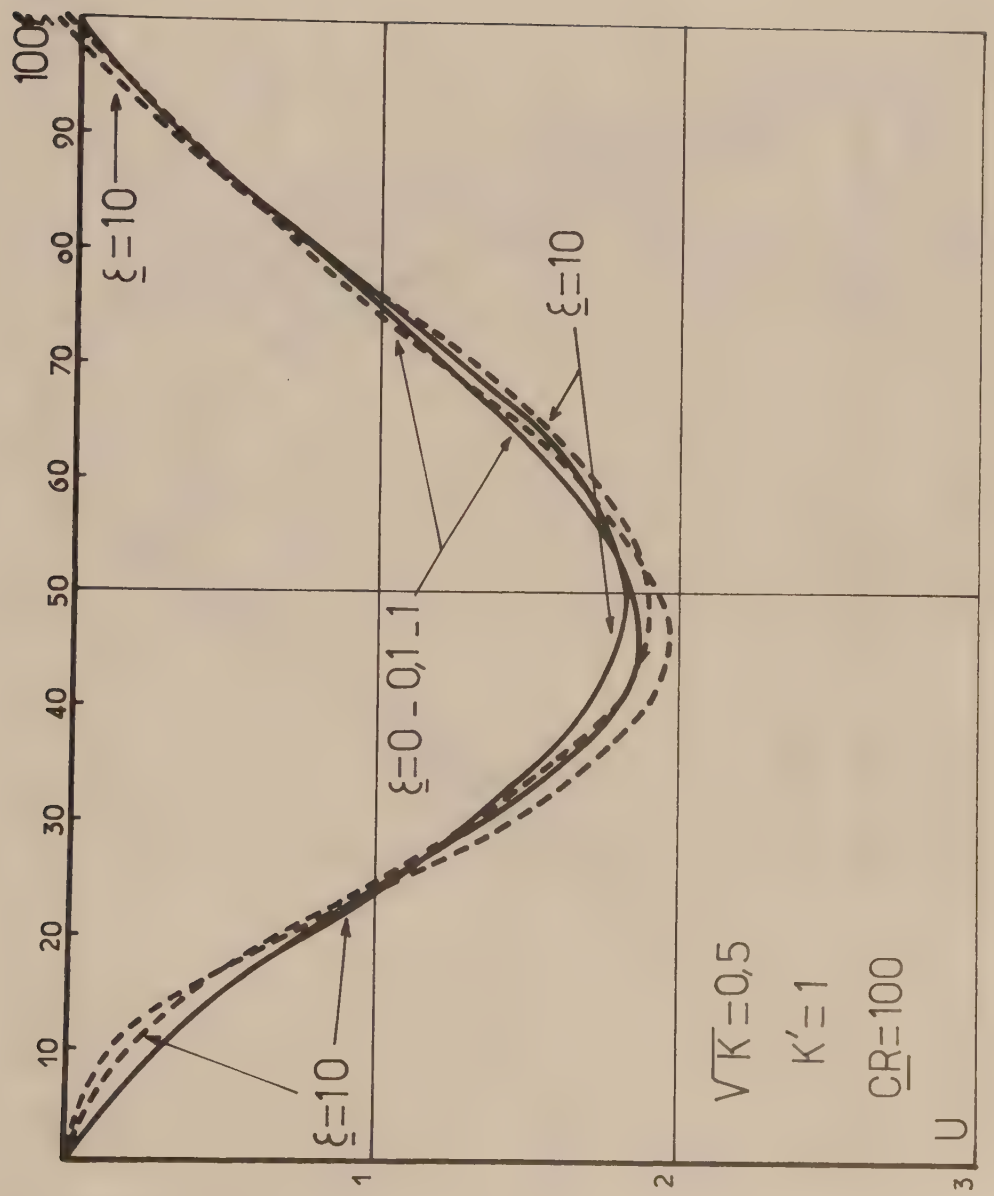
pl. 23


100ξ
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
ξ=0-0,1
ξ=1
ξ=10
ξ=0,1
ξ=0
√K= 0,5
K'= 1
CR = 10
U
1
2
3

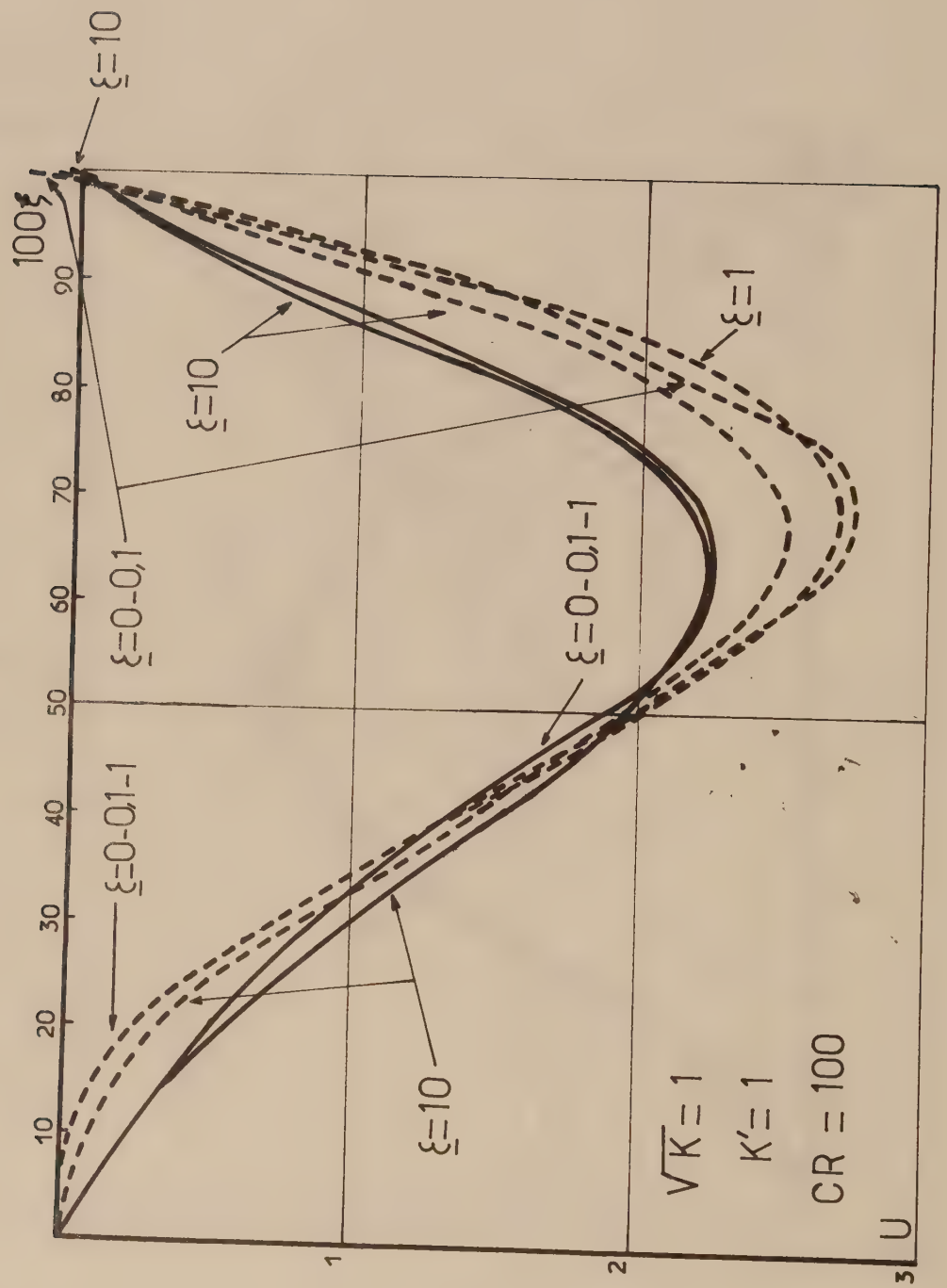
pl. 24



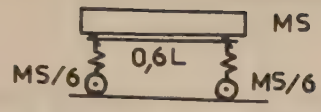

pl.25




pl.26


100ξ
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1
2
3
U
ξ=10
ξ=1
ξ=0-0,1
ξ=0-0,1-1
ξ=10
ξ=1
ξ=0-0,1
ξ=0-0,1-1
ξ=10
√K = 1
K' = 1
CR = 100

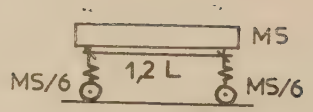
pl.27




$\underline{J} = 1$

$\underline{\xi} = 0$

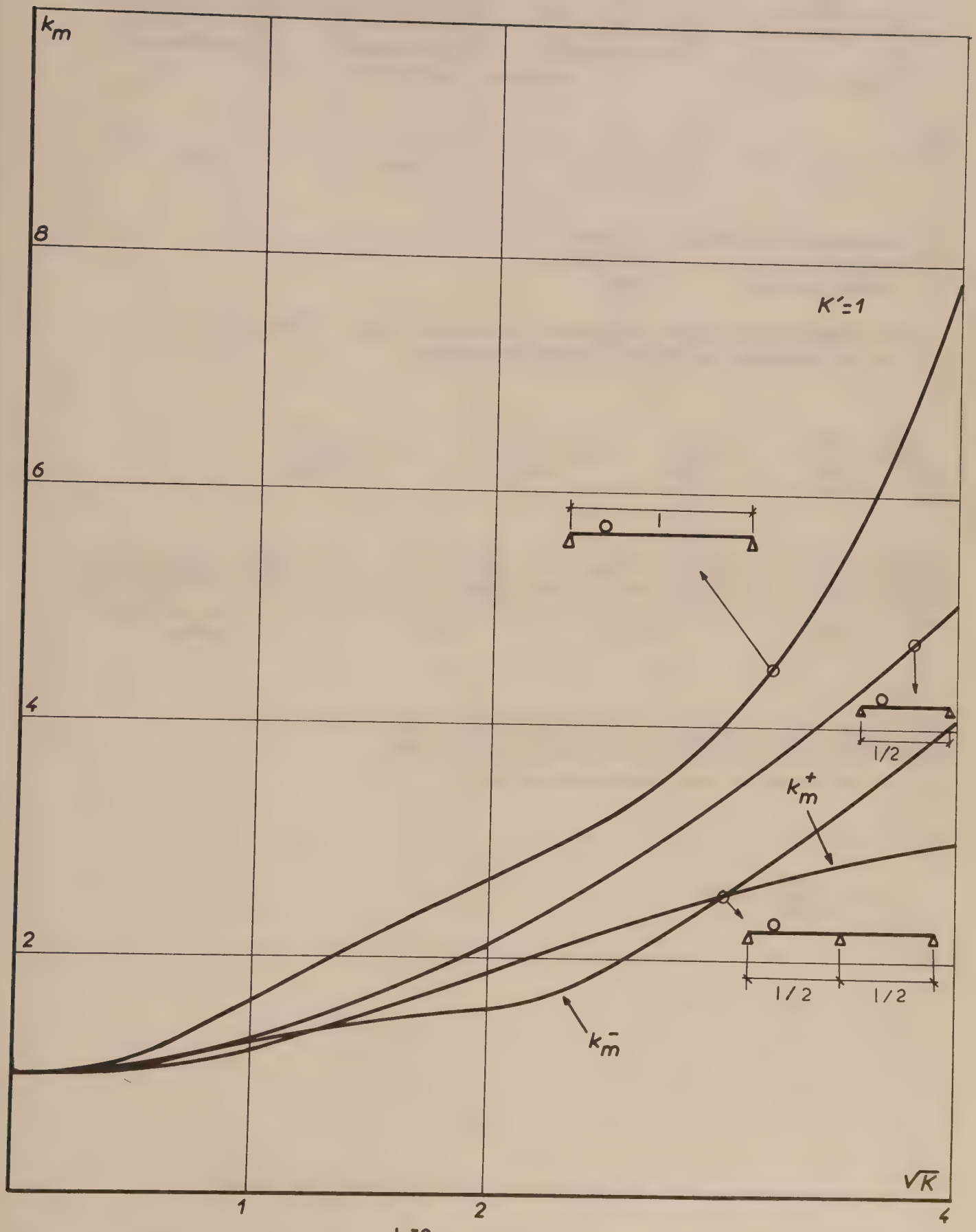
| CR → | | | 0,1 | | 1 | | 10 | | 100 | | | | M 0.6L M $M=\frac{4\,MS}{6}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| K′ | $\sqrt{K}$ | $M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ |
| 0,25 | 0,5 | 30,000 J=110 i=50 | 30,055 J=53⅓ i=53⅓ | 1,0018 | 29,973 J=53⅓ i=53⅓ | 0,9991 | 30,796 J=53⅓ i=53⅓ | 1,0265 | 43,576 J=120 i=53⅓ | 1,4525 | | | 30,105 J=53⅓ i=53⅓ | 1,0035 |
| | 1 | | 32,453 J=50 i=50 | 1,0818 | 32,281 J=50 i=50 | 1,0760 | 32,264 J=100 i=46⅔ | 1,0755 | 45,386 J=146⅔ i=50 | 1,5129 | | | 33,446 J=53⅓ i=53⅓ | 1,1149 |
| | 2 | | 34,886 J=103⅓ i=43⅓ | 1,1629 | 34,685 J=103⅓ i=43⅓ | 1,1562 | 34,252 J=103⅓ i=43⅓ | 1,1417 | 48,850 J=93⅓ i=53⅓ | 1,6283 | | | 43,359 J=103⅓ i=43⅓ | 1,4453 |
| | 4 | | 41,028 J=150 i=60 | 1,3676 | 40,775 J=150 i=60 | 1,3592 | 38,750 J=150 i=60 | 1,2917 | 41,475 J=133⅓ i=36⅔ | 1,3825 | | | 68,199 J=160 i=63⅓ | 2,2733 |
| 1 | 0,5 | 12,000 J=110 i=50 | 12,046 J=56⅔ i=56⅔ | 1,0039 | 11,947 J=56⅔ i=56⅔ | 0,9956 | 13,392 J=70 i=66⅔ | 1,1160 | 46,163 J=80 i=80 | 3,8469 | | | 12,461 J=96⅔ i=36⅔ | 1,0384 |
| | 1 | | 14,713 J=53⅓ i=53⅓ | 1,2260 | 14,435 J=53⅓ i=53⅓ | 1,2029 | 15,469 J=100 i=40 | 1,2891 | 35,489 J=86⅔ i=80 | 2,9574 | | | 16,428 J=60 i=60 | 1,3690 |
| | 2 | | 20,123 J=103⅓ i=43⅓ | 1,6769 | 19,689 J=103⅓ i=43⅓ | 1,6407 | 17,683 J=103⅓ i=43⅓ | 1,4736 | 34,478 J=93⅓ i=70 | 2,8731 | | | 36,538 J=130 i=70 | 3,0449 |
| | 4 | | 29,262 J=160 i=66⅔ | 2,4385 | 28,735 J=160 i=66⅔ | 2,3945 | 24,498 J=160 i=63⅓ | 2,0415 | 26,235 J=103⅓ i=70 | 2,1862 | | | 92,706 J=153⅓ i=93⅓ | 7,7255 |
| 2 | 0,5 | 9,000 J=110 i=50 | 9,1442 J=96⅔ i=36⅔ | 1,0160 | 9,1306 J=93⅓ i=33⅓ | 1,0145 | 12,356 J=73⅓ i=70 | 1,3728 | 10,188 J=86⅔ i=86⅔ | 1,1320 | | | 10,793 J=100 i=40 | 1,1992 |
| | 1 | | 12,038 J=56⅔ i=56⅔ | 1,3375 | 11,623 J=53⅓ i=53⅓ | 1,2915 | 13,865 J=100 i=40 | 1,5406 | 71,119 J=90 i=86⅔ | 7,9021 | | | 17,763 J=96⅔ i=36⅔ | 1,9737 |
| | 2 | | 20,261 J=103⅓ i=43⅓ | 2,2513 | 19,525 J=103⅓ i=43⅓ | 2,1694 | 15,711 J=106⅔ i=46⅔ | 1,7456 | 38,649 J=90 i=86⅔ | 4,2943 | | | 55,216 J=143⅓ i=83⅓ | 6,1352 |
| | 4 | | 33,678 J=160 i=70 | 3,7420 | 32,749 J=160 i=70 | 3,6388 | 25,251 J=160 i=66⅔ | 2,8057 | 26,696 J=103⅓ i=73⅓ | 2,9663 | | | 489,69 J=156⅔ i=96⅔ | 54,410 |




$\underline{J} = 1$

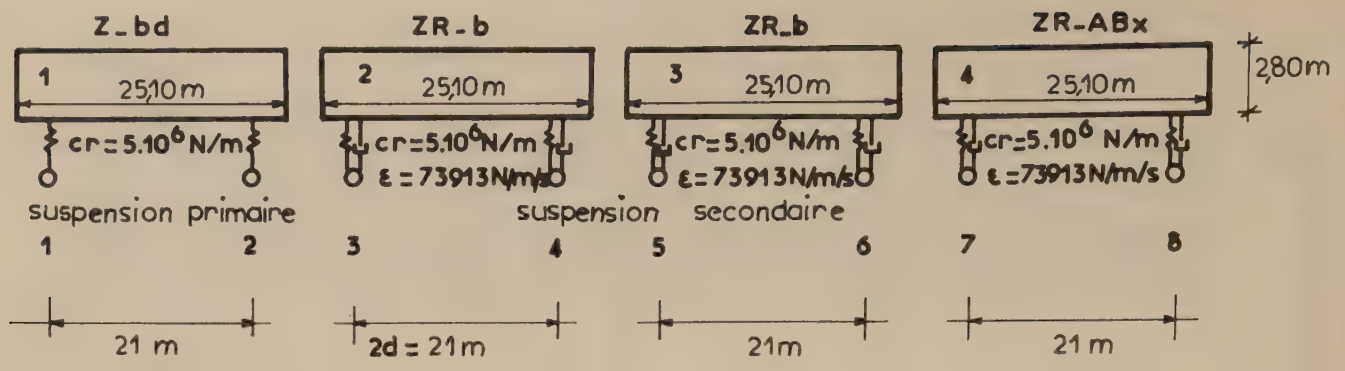
$\underline{\xi} = 0$

| | CR → | 0,1 | | 1 | | 10 | | 100 | | | | $M \oplus 1{,}2\,L \oplus M$ $M = \frac{4MS}{6}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| K′ | $\sqrt{K}$ | $M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ | $M_d$ | $M_d/M_s$ |
| 0,25 | 0,5 | 30,000 J=170 i=50 | 30,189 J=170 i=50 | 1,0063 | 30,056 J=170 i=50 | 1,0019 | 30,796 J=53⅓ i=53⅓ | 1,0265 | 30,439 J=170 i=50 | 1,0146 | | | 30,439 J=170 i=50 | 1,0146 |
| | 1 | | 32,453 J=50 i=50 | 1,0818 | 32,281 J=50 i=50 | 1,0760 | 31,435 J=50 i=50 | 1,0478 | 34,172 J=50 i=50 | 1,1391 | | | 33,446 J=53⅓ i=53⅓ | 1,1149 |
| | 2 | | 41,184 J=210 i=50 | 1,3728 | 40,874 J=210 i=50 | 1,3625 | 38,703 J=210 i=50 | 1,2901 | 46,443 J=216⅔ i=53⅓ | 1,5481 | | | 46,670 J=216⅔ i=46⅔ | 1,5557 |
| | 4 | | 34,517 J=113⅓ i=43⅓ | 1,1506 | 34,388 J=113⅓ i=43⅓ | 1,1463 | 33,328 J=113⅓ i=43⅓ | 1,1109 | 34,277 J=110 i=40 | 1,1426 | | | 60,508 J=123⅓ i=6⅔ | 2,0169 |
| 1 | 0,5 | 12,000 J=170 i=50 | 12,137 J=170 i=50 | 1,0114 | 11,947 J=56⅔ i=56⅔ | 0,9956 | 13,175 J=56⅔ i=56⅔ | 1,0979 | 12,456 J=166⅔ i=46⅔ | 1,0380 | | | 12,737 J=166⅔ i=46⅔ | 1,0614 |
| | 1 | | 14,713 J=53⅓ i=53⅓ | 1,2260 | 14,435 J=53⅓ i=53⅓ | 1,2029 | 13,012 J=53⅓ i=53⅓ | 1,0843 | 16,181 J=173⅓ i=53⅓ | 1,3484 | | | 16,426 J=60 i=60 | 1,3689 |
| | 2 | | 23,589 J=216⅔ i=46⅔ | 1,9658 | 23,190 J=216⅔ i=46⅔ | 1,9325 | 19,839 J=213⅓ i=50 | 1,6532 | 19,359 J=100 i=53⅓ | 1,6132 | | | 21,663 J=100 i=50 | 1,8052 |
| | 4 | | 23,801 J=123⅓ i=6⅔ | 1,9834 | 23,560 J=123⅓ i=6⅔ | 1,9634 | 21,501 J=123⅓ i=6⅔ | 1,7918 | 19,643 J=133⅓ i=26⅔ | 1,6369 | | | 156,84 J=123⅓ i=6⅔ | 13,070 |
| 2 | 0,5 | 9,000 J=170 i=50 | 9,0711 J=166⅔ i=46⅔ | 1,0079 | 8,8363 J=60 i=60 | 0,9818 | 10,499 J=60 i=60 | 1,1665 | 10,043 J=170 i=50 | 1,1159 | | | 10,388 J=170 i=50 | 1,1542 |
| | 1 | | 12,038 J=56⅔ i=56⅔ | 1,3375 | 11,623 J=53⅓ i=53⅓ | 1,2915 | 9,5600 J=53⅓ i=53⅓ | 1,0622 | 15,215 J=176⅔ i=56⅔ | 1,6906 | | | 17,584 J=170 i=50 | 1,9538 |
| | 2 | | 20,393 J=220 i=46⅔ | 2,2659 | 20,072 J=220 i=46⅔ | 2,2303 | 16,171 J=220 i=46⅔ | 1,7967 | 15,774 J=103⅓ i=53⅓ | 1,7527 | | | 62,204 J=123⅓ i=6⅔ | 6,9116 |
| | 4 | | 38,105 J=123⅓ i=6⅔ | 4,2339 | 37,584 J=123⅓ i=6⅔ | 4,1760 | 33,032 J=123⅓ i=6⅔ | 3,6703 | 22,098 J=123⅓ i=6⅔ | 2,4553 | | | 1089,4 J=216⅔ i=96⅔ | 121,04 |




pl. 30

## SCHEMATISATION DE LA RAME




longueur de l'ouvrage $l = 210m$
masse $\rho sl = 3822 t$
inertie moyenne $3\ m^4$

la distance entre essieux de véhicules successifs étant inférieure à 0,1 l on les suppose confondus géométriquement

$$\underline{MS} = \frac{MS}{\rho SL} \qquad \underline{M} = \frac{M}{\rho SL} \qquad \underline{CR} = \frac{CR}{MS}\,\frac{L^3}{EI} \qquad \underline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{MS}\sqrt{\frac{L^2}{EI\rho S}}$$

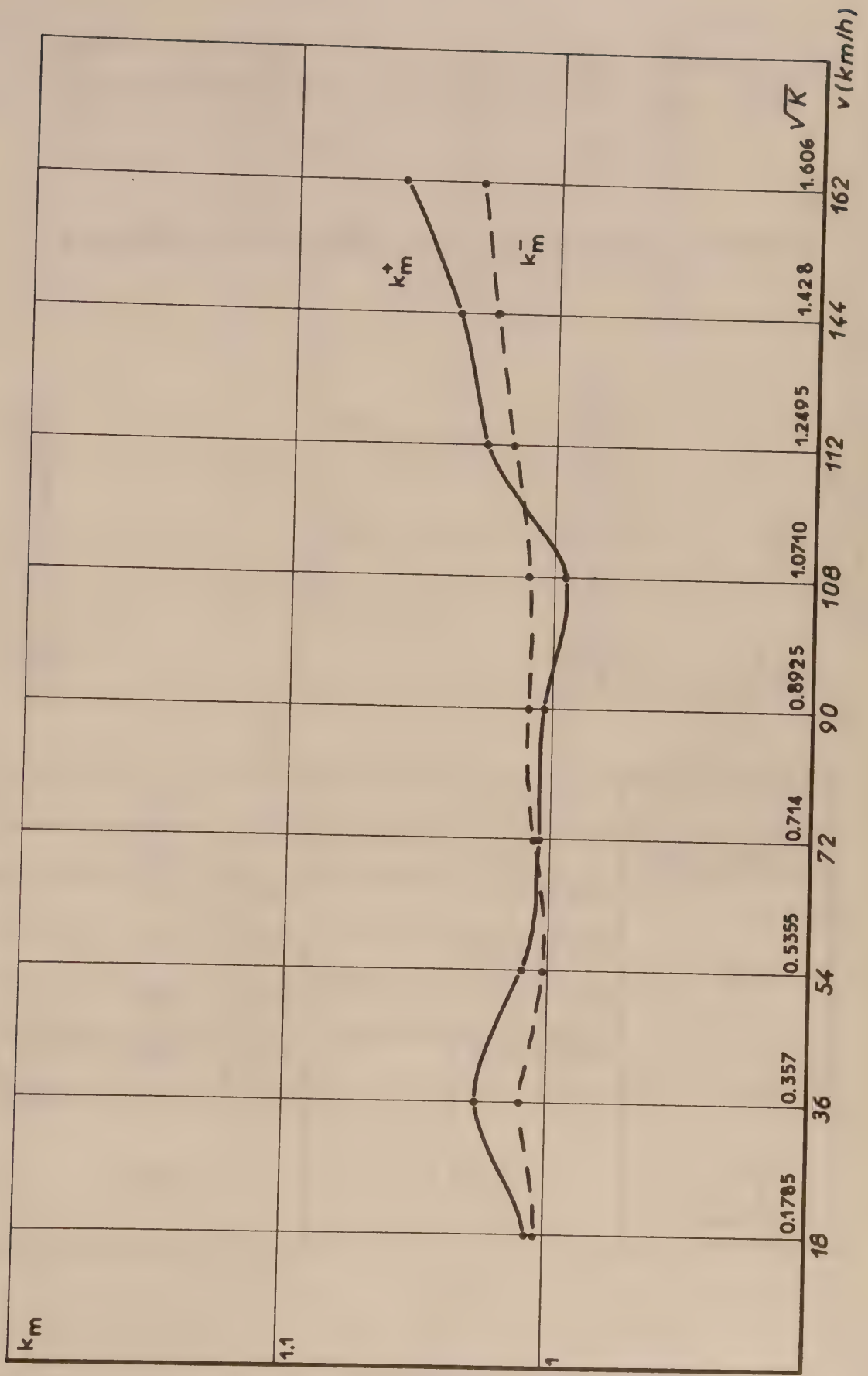
| MS | CR | ε | MS | CR | ε | MS | CR | ε | MS | CR | ε |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0205 | 3584 | 0 | 0,0116 | 6311 | 12,458 | 0,0116 | 6311 | 12,458 | 0,0118 | 6228 | 12,292 |
| Z_bd | | | ZR_b | | | ZR_b | | | ZR_ABx | | |

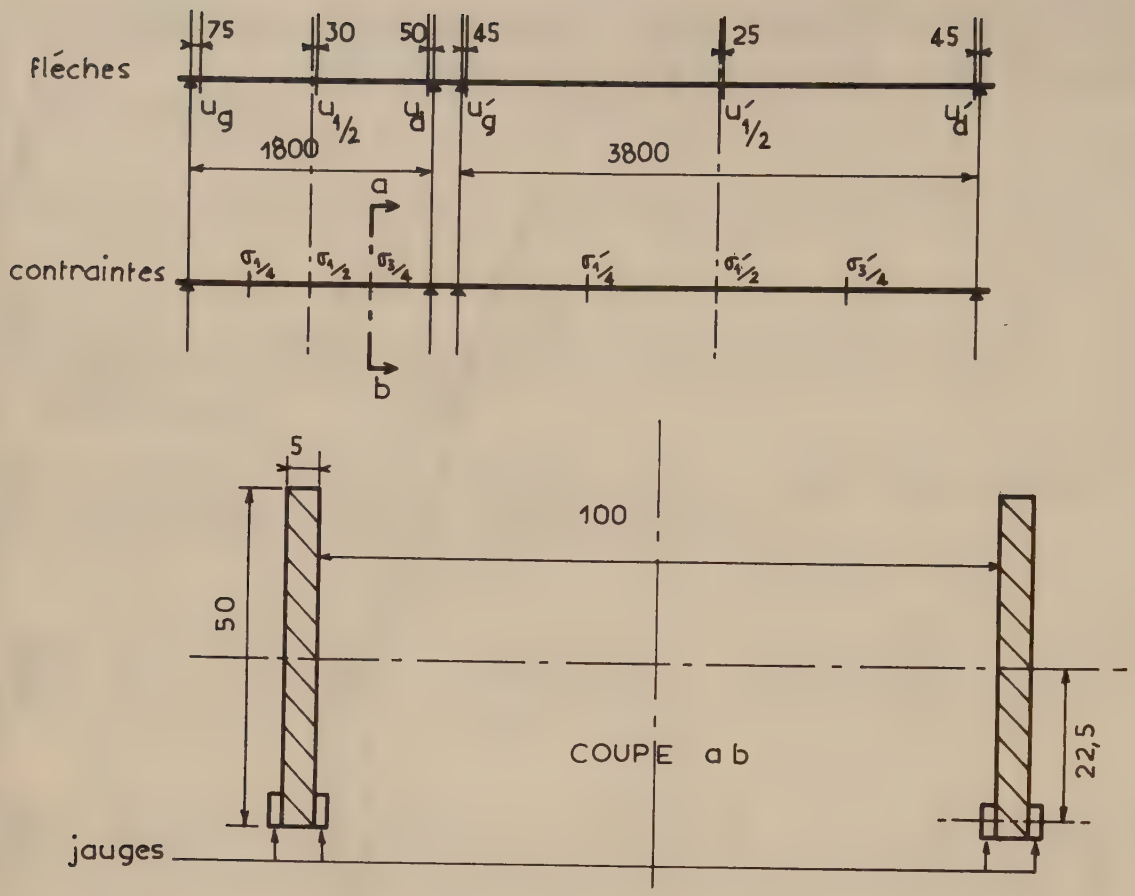
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0009 | 0,0009 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0014 | |

$$\underline{J} = \frac{L^2+H^2}{12(d)^2} = 0.482$$

$\sqrt{K} = 0.0357$ (v=1m/s)

pl. 32

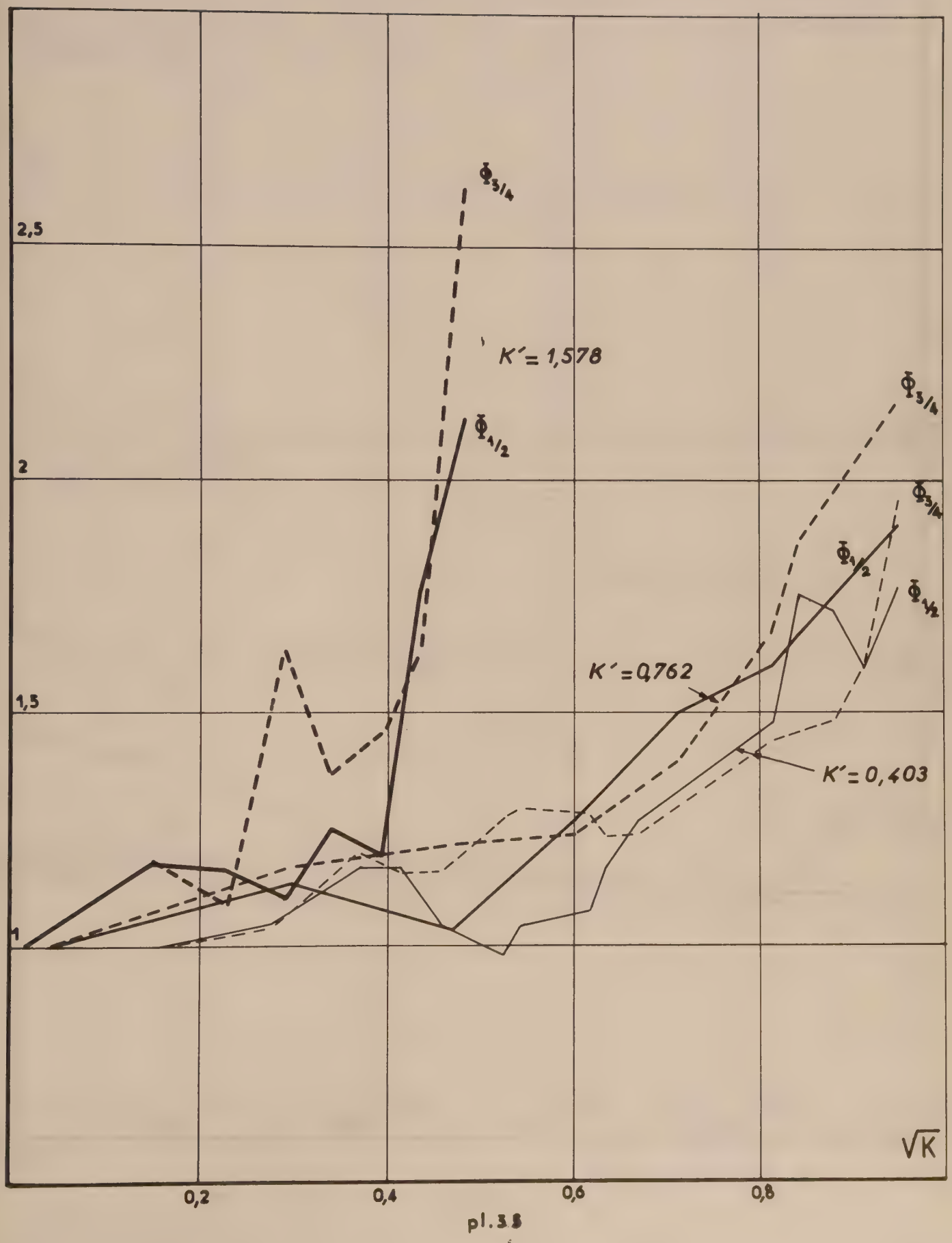

$k_m$
1.1
1
$k_m^+$
$k_m^-$
0.1785
0.357
0.5355
0.714
0.8925
1.0710
1.2495
1.428
1.606 $\sqrt{K}$
18
36
54
72
90
108
112
144
162
v (km/h)



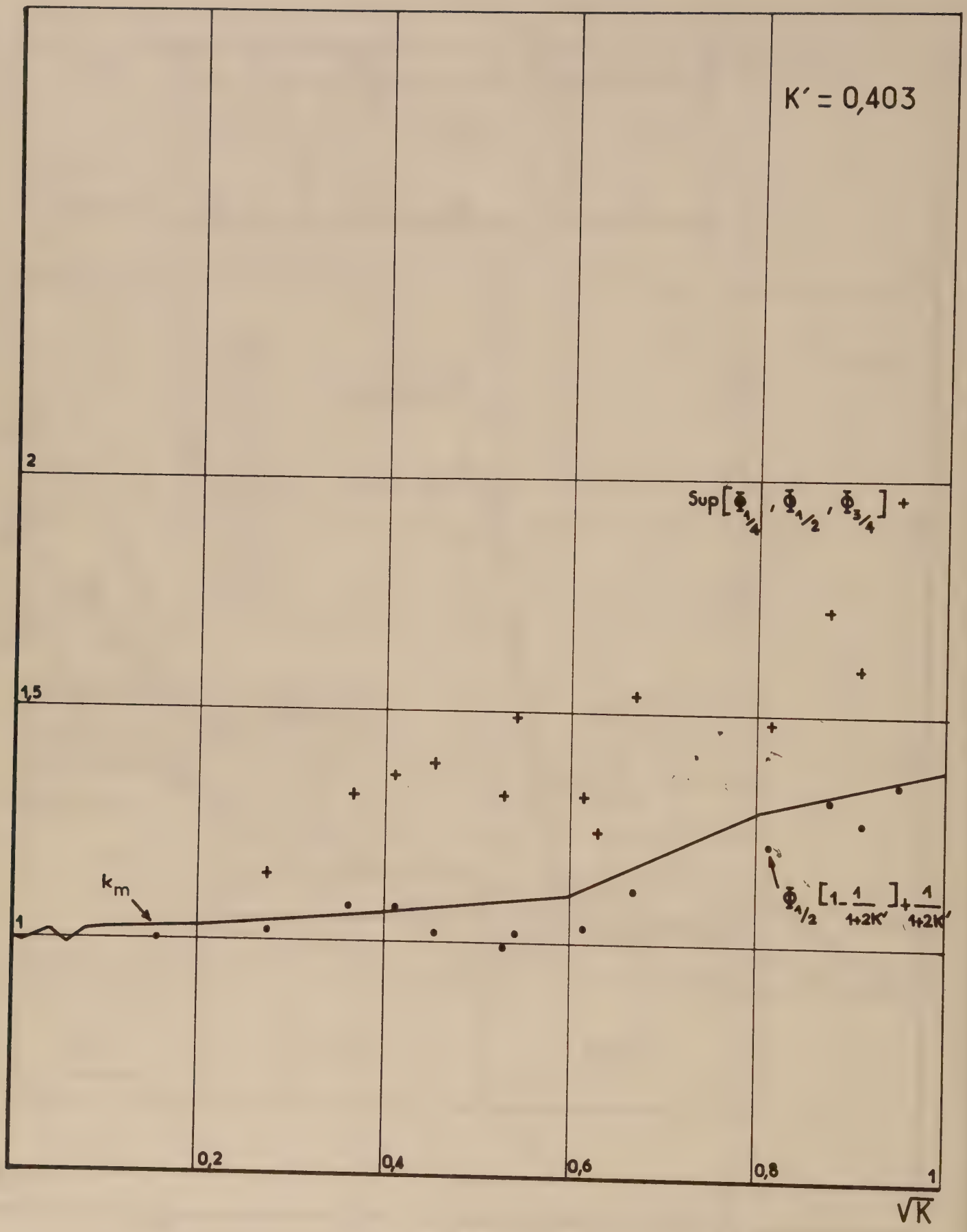

pl.33

| longueur (m) | 1,80 | | 3,80 | |
|---|---|---|---|---|
| masse de la travée (kg) | 10,180 | | 21,077 | |
| K′ | série 1 | 0,835 | série 1 | 0,403 |
| | série 2 | 1,184 | série 2 | 0,477 |
| | série 3 | 1,578 | série 3 | 0,572 |
| | série 4 | 0,835 | série 4 | 0,762 |
| $\sqrt{K}$ v : vitesse | 0,029 v | | 0,060 v | |

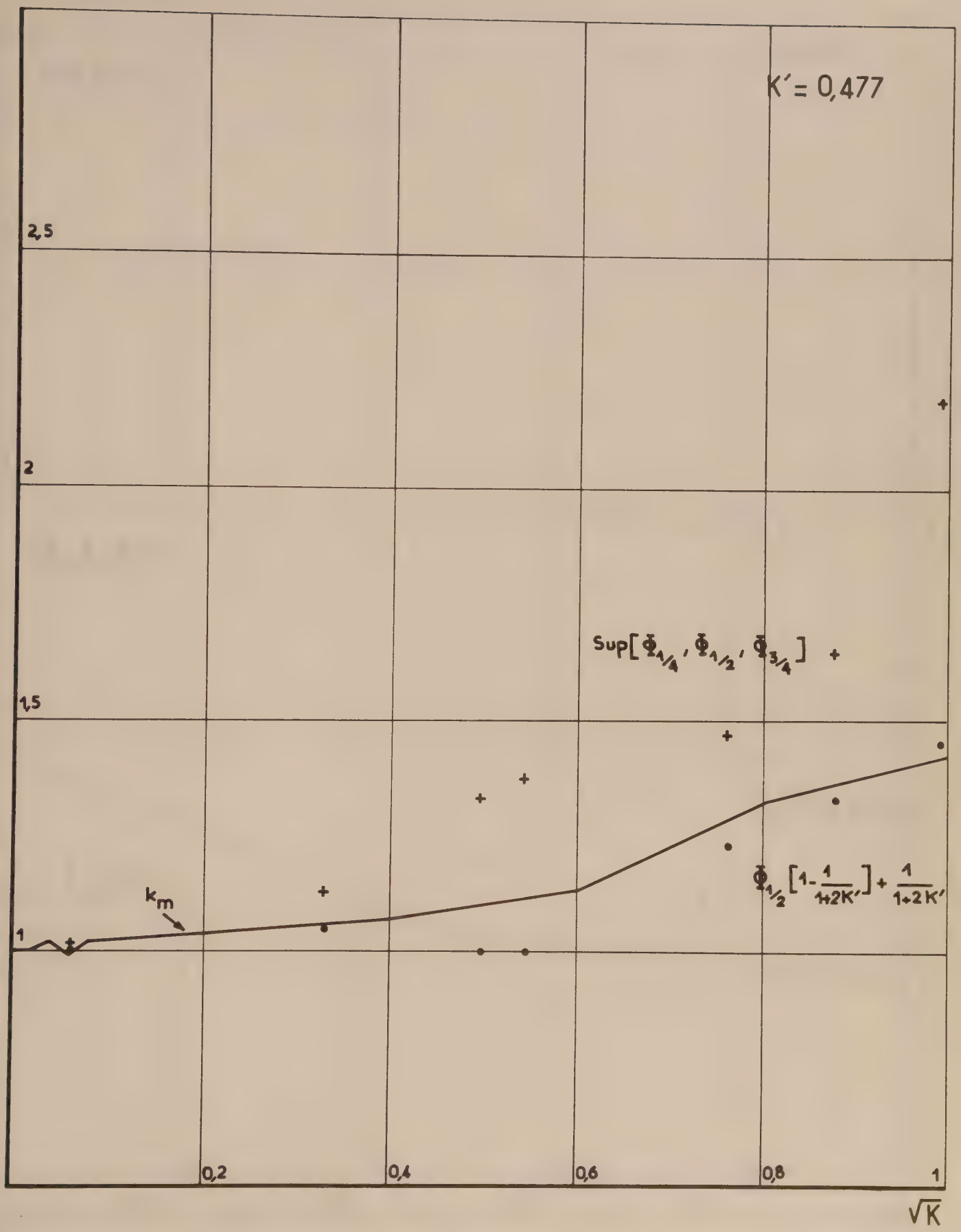
pl. 34



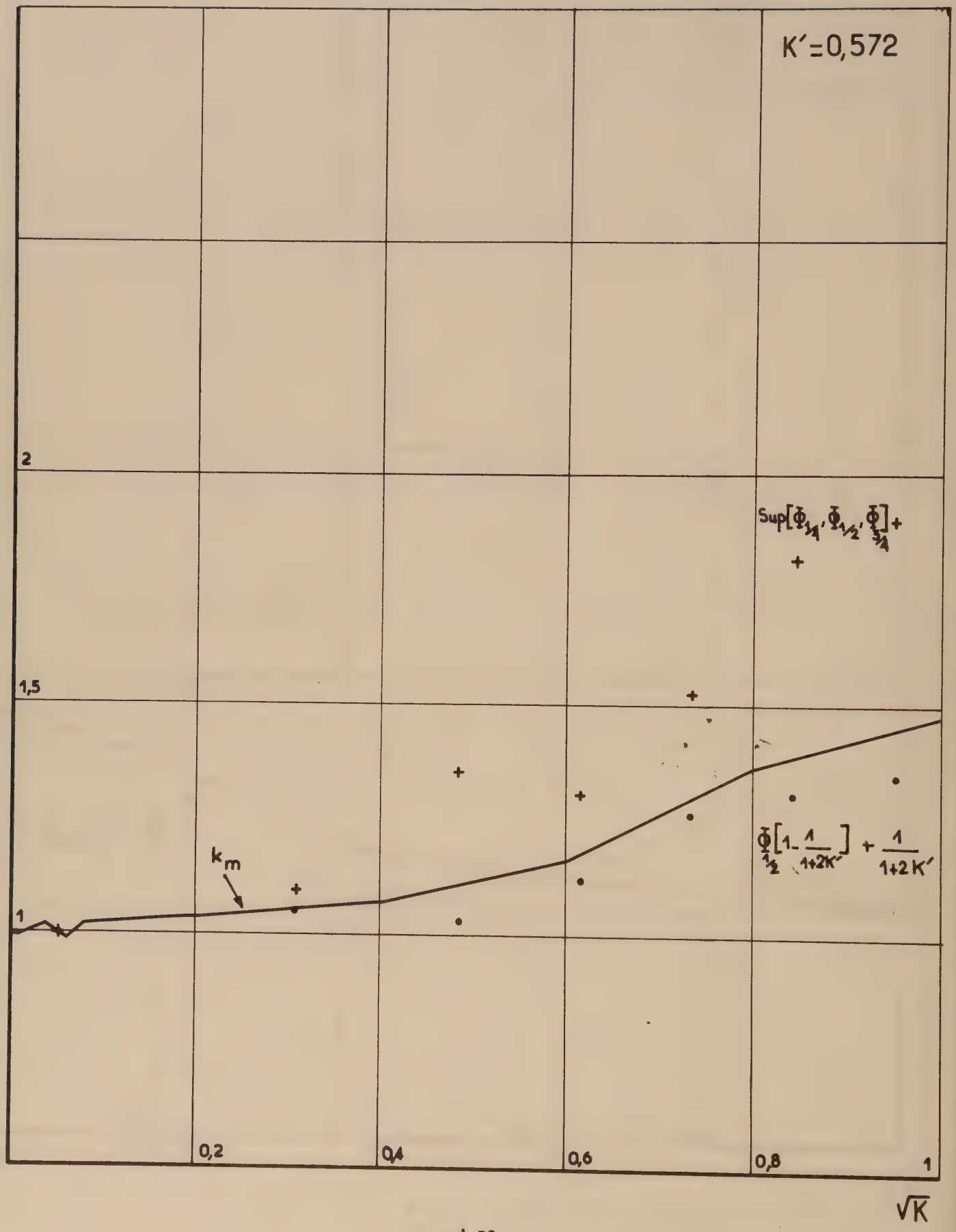

pl. 38



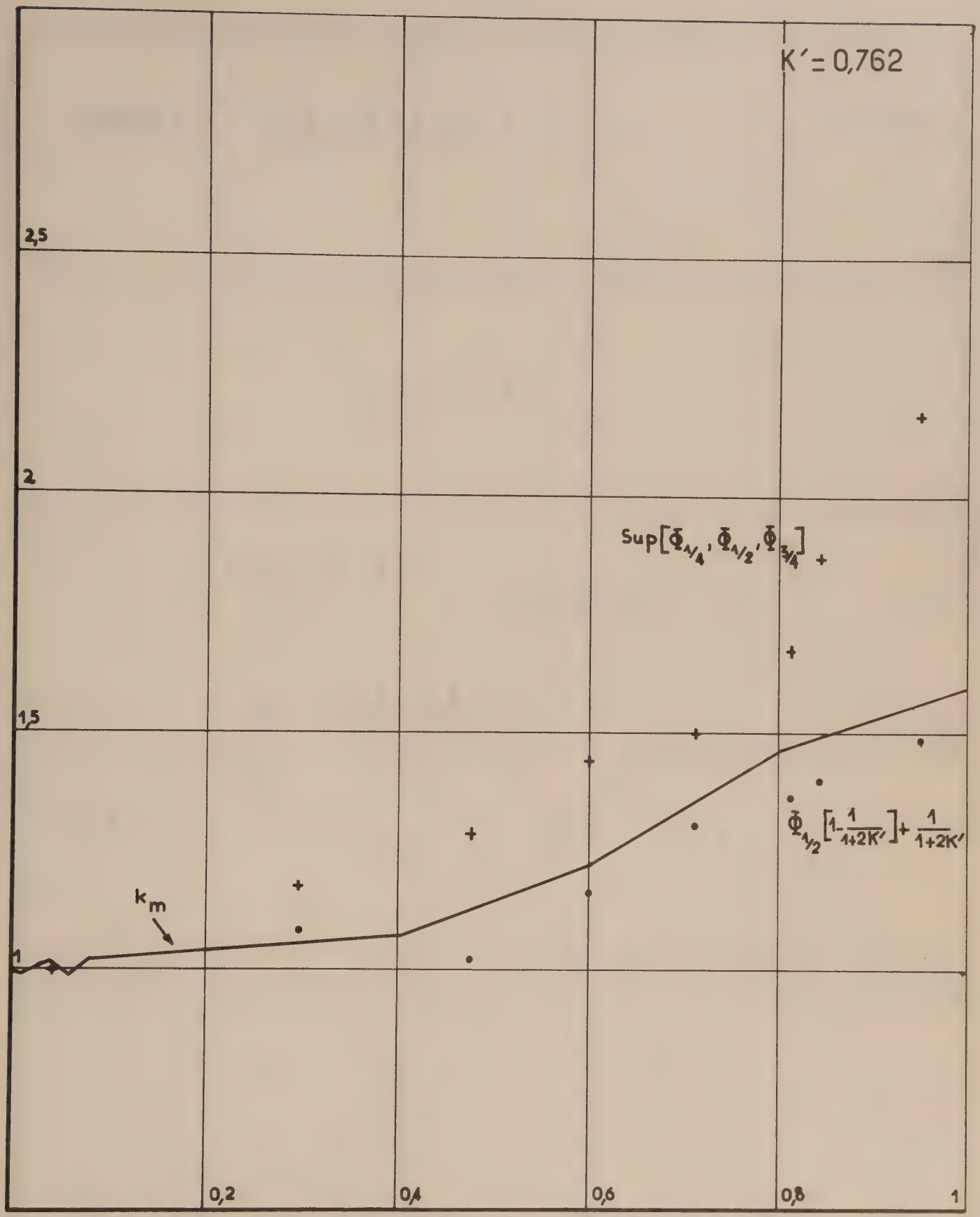

pl. 3 6



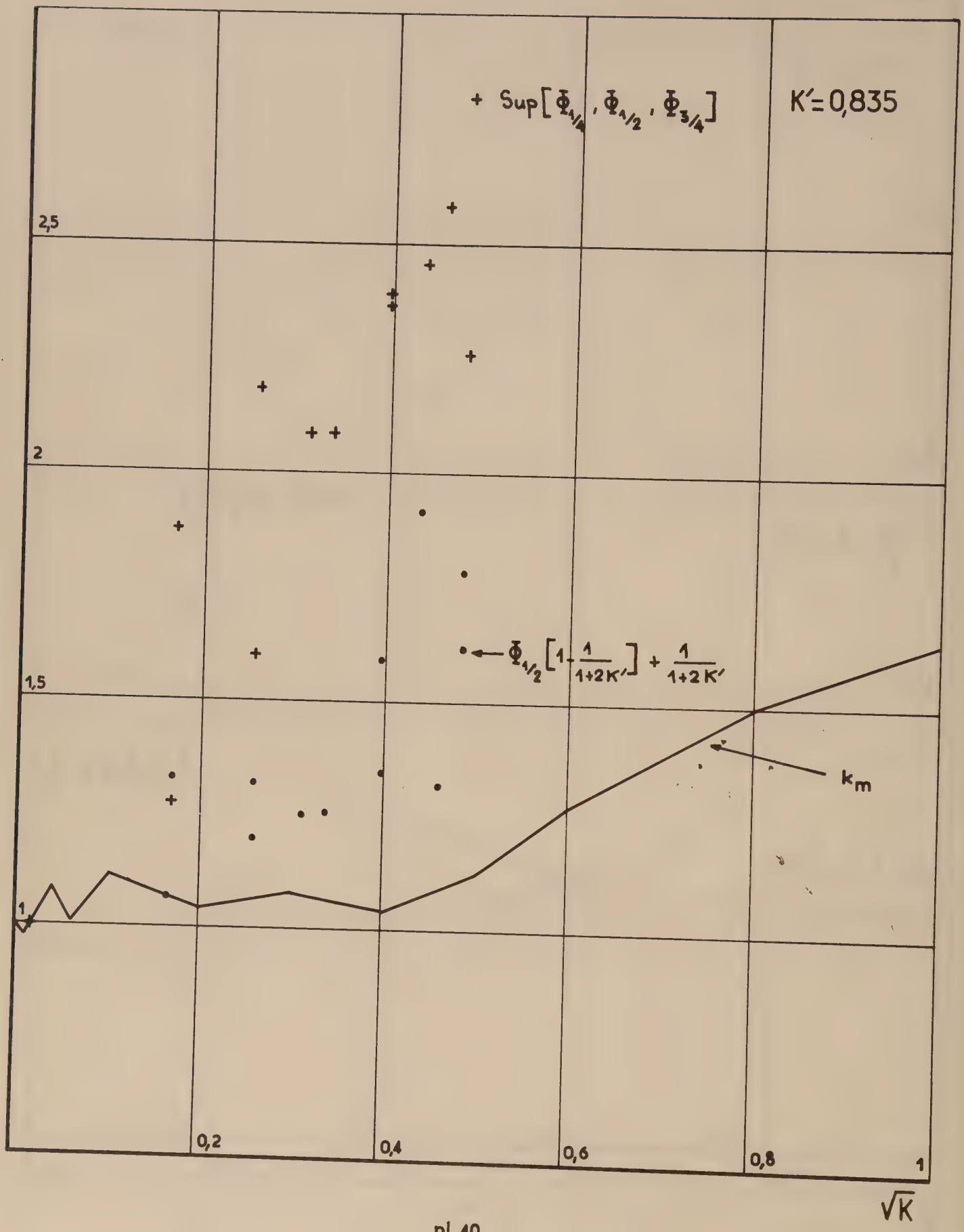

pl. 3 7


K′=0,572
2
1,5
1
$k_m$
$\sup[\Phi_{1/1}, \Phi_{1/2}, \Phi_{3/1}]$ +
+
$\Phi_{1/2}\left[1-\frac{1}{1+2K'}\right]+\frac{1}{1+2K'}$
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\sqrt{K}$

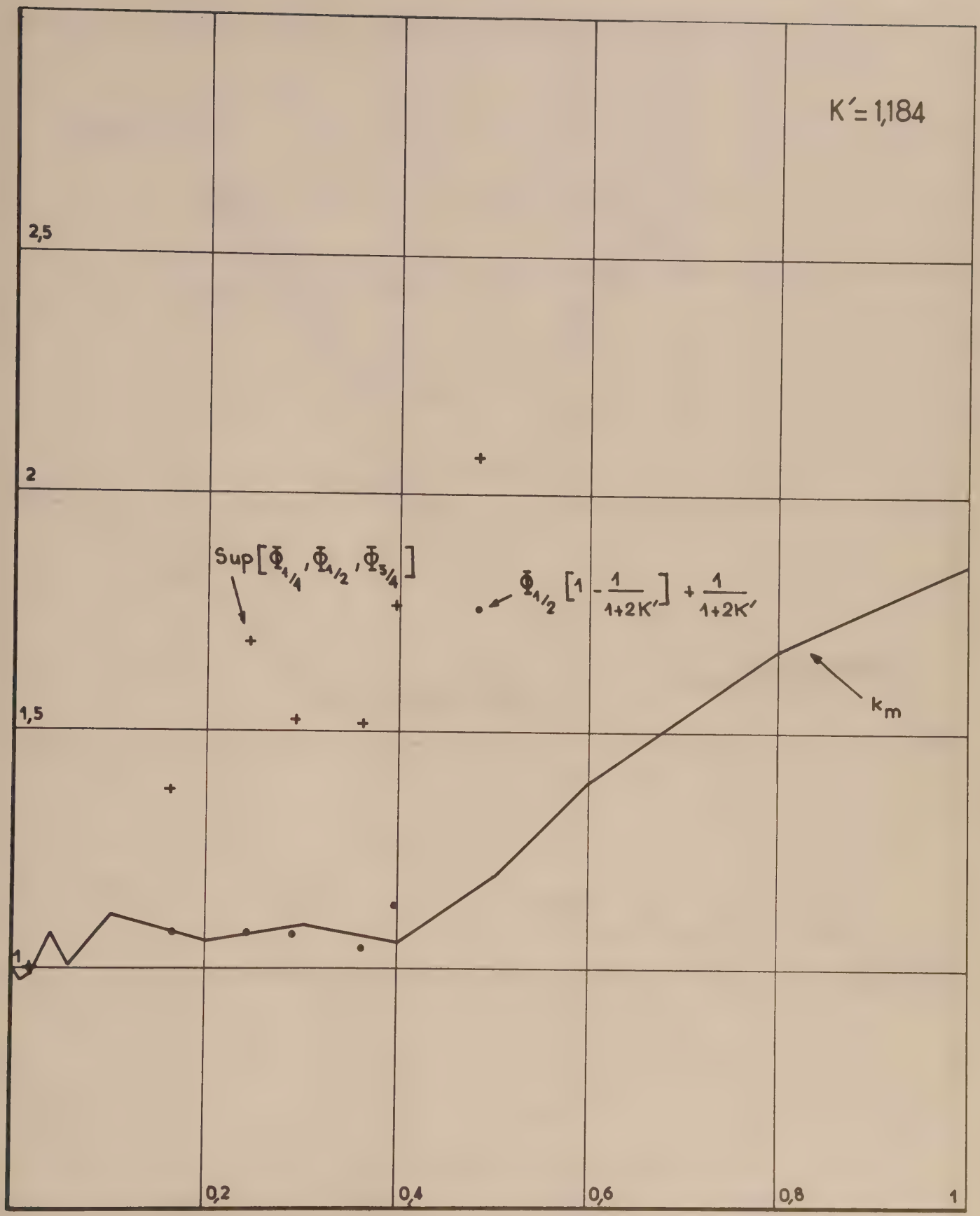
pl. 38



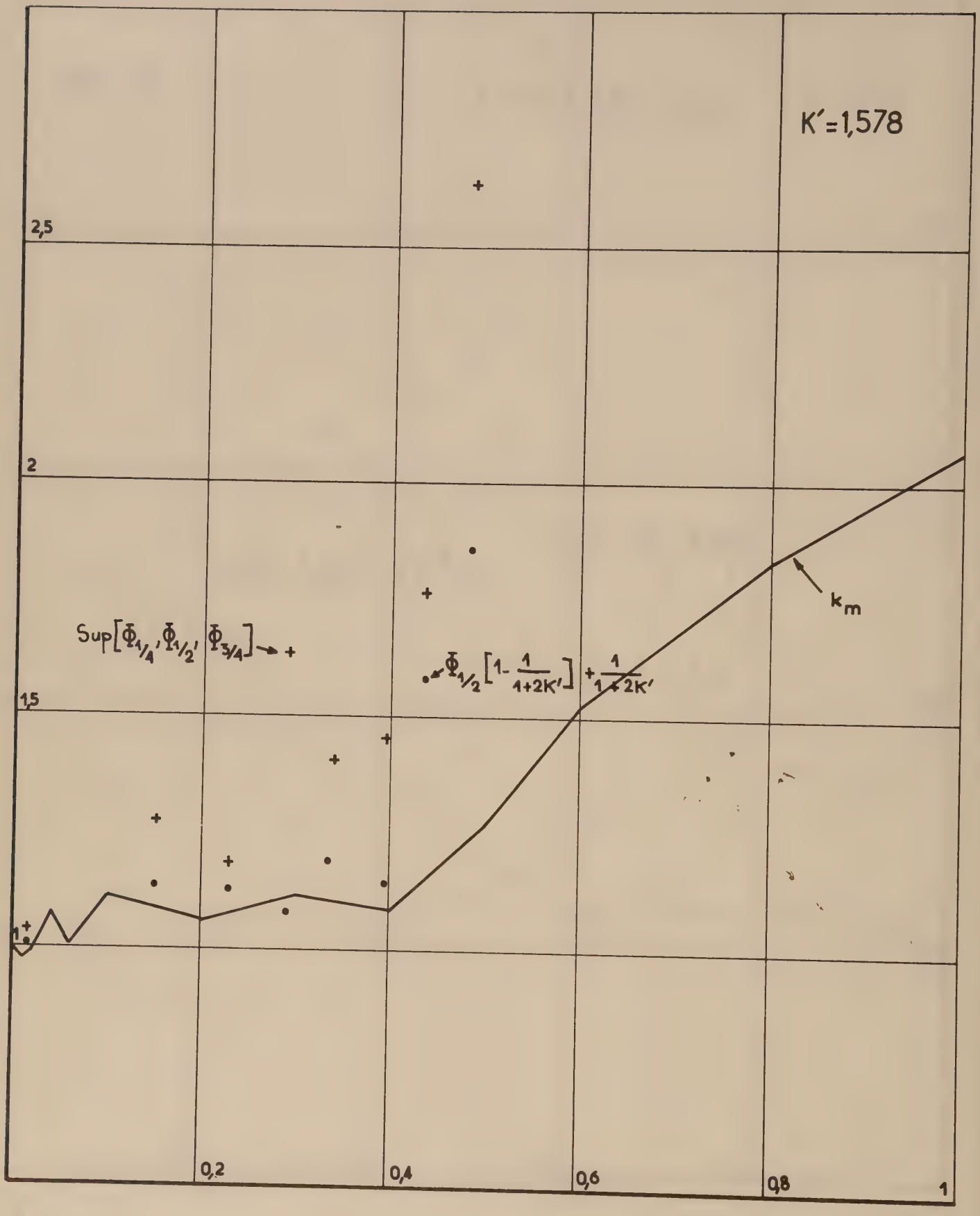

pl. 39




pl. 40

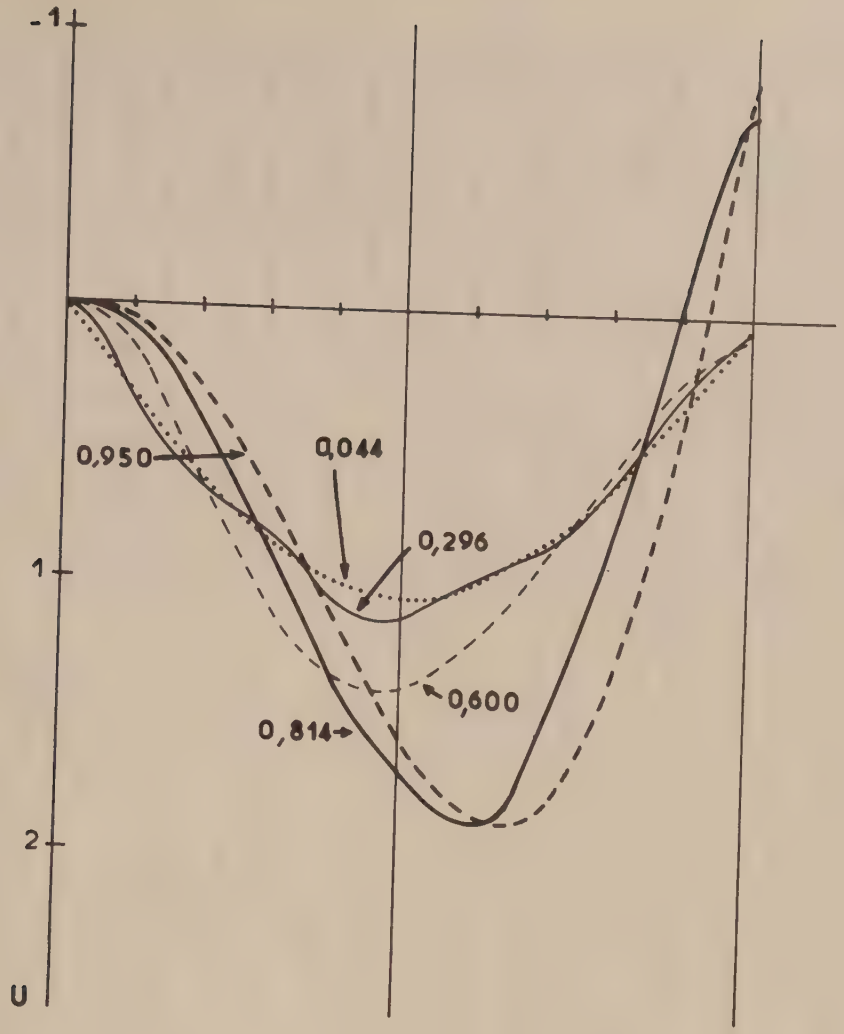


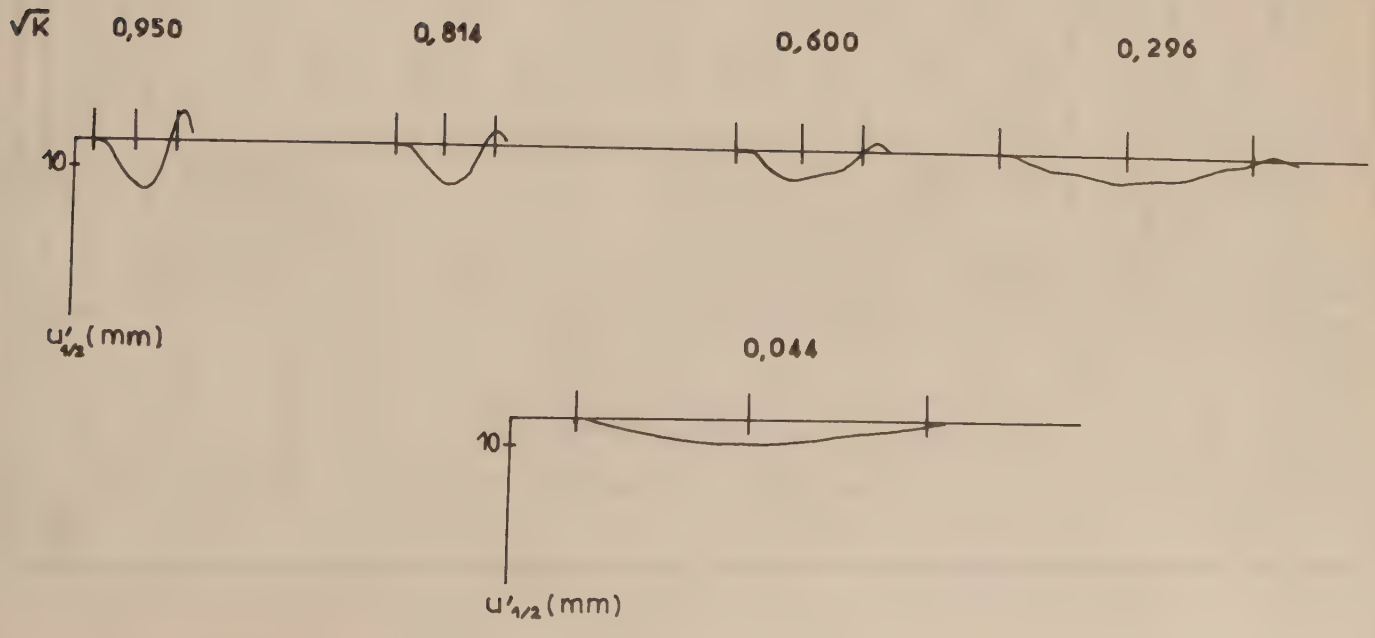

pl. 41

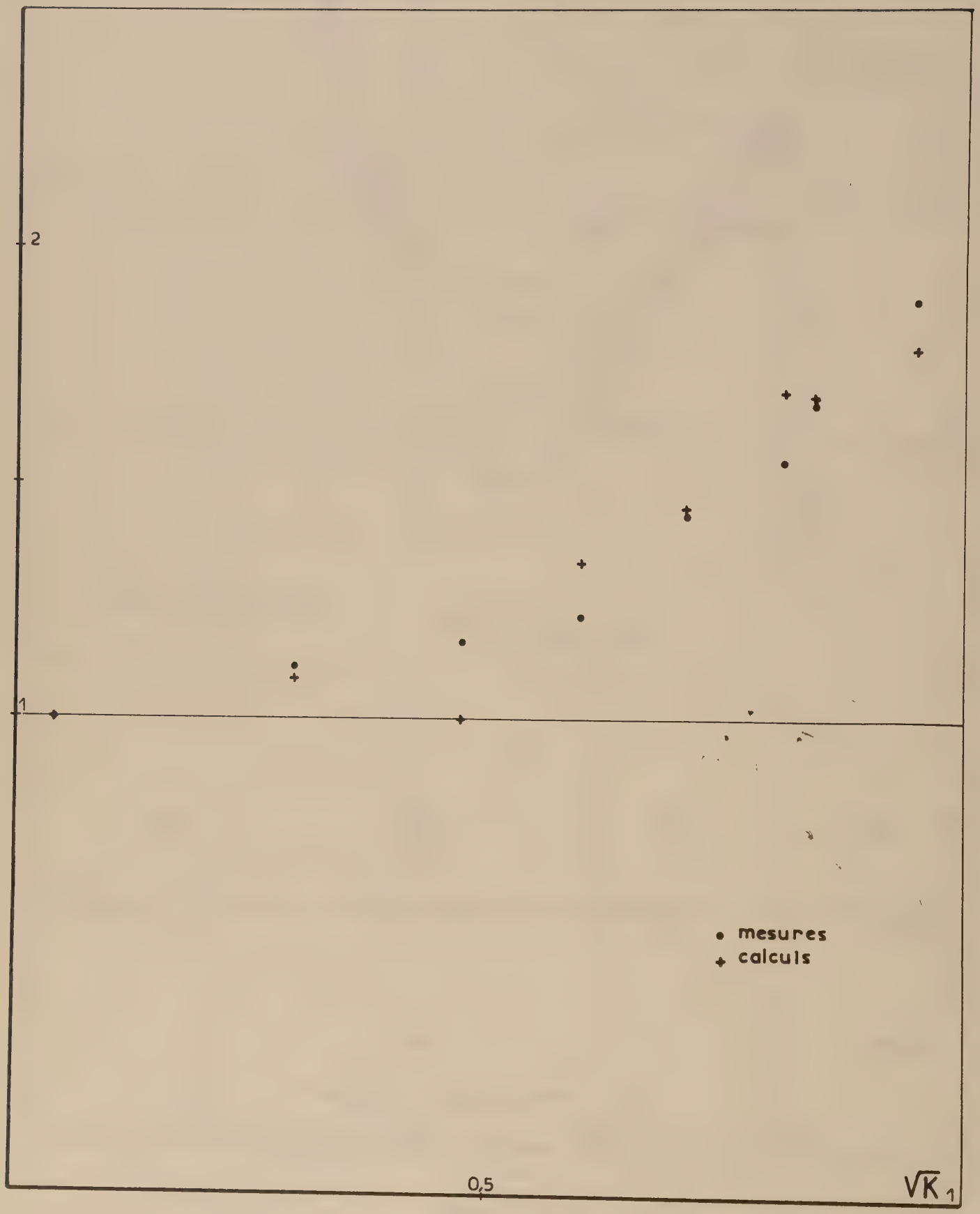

K'=1,578
2,5
2
1,5
1
$\mathrm{Sup}[\Phi_{1/4}, \Phi_{1/2}, \Phi_{3/4}]$
$\Phi_{1/2}\left[1-\frac{1}{1+2K'}\right]+\frac{1}{1+2K'}$
$k_m$
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\sqrt{K}$

pl. 42

pl. 43


-1
1
2
U
0,950
0,044
0,296
0,600
0,814


√k
0,950
0,814
0,600
0,296
10
u'1/2 (mm)
0,044
10
u'1/2 (mm)




pl. 44

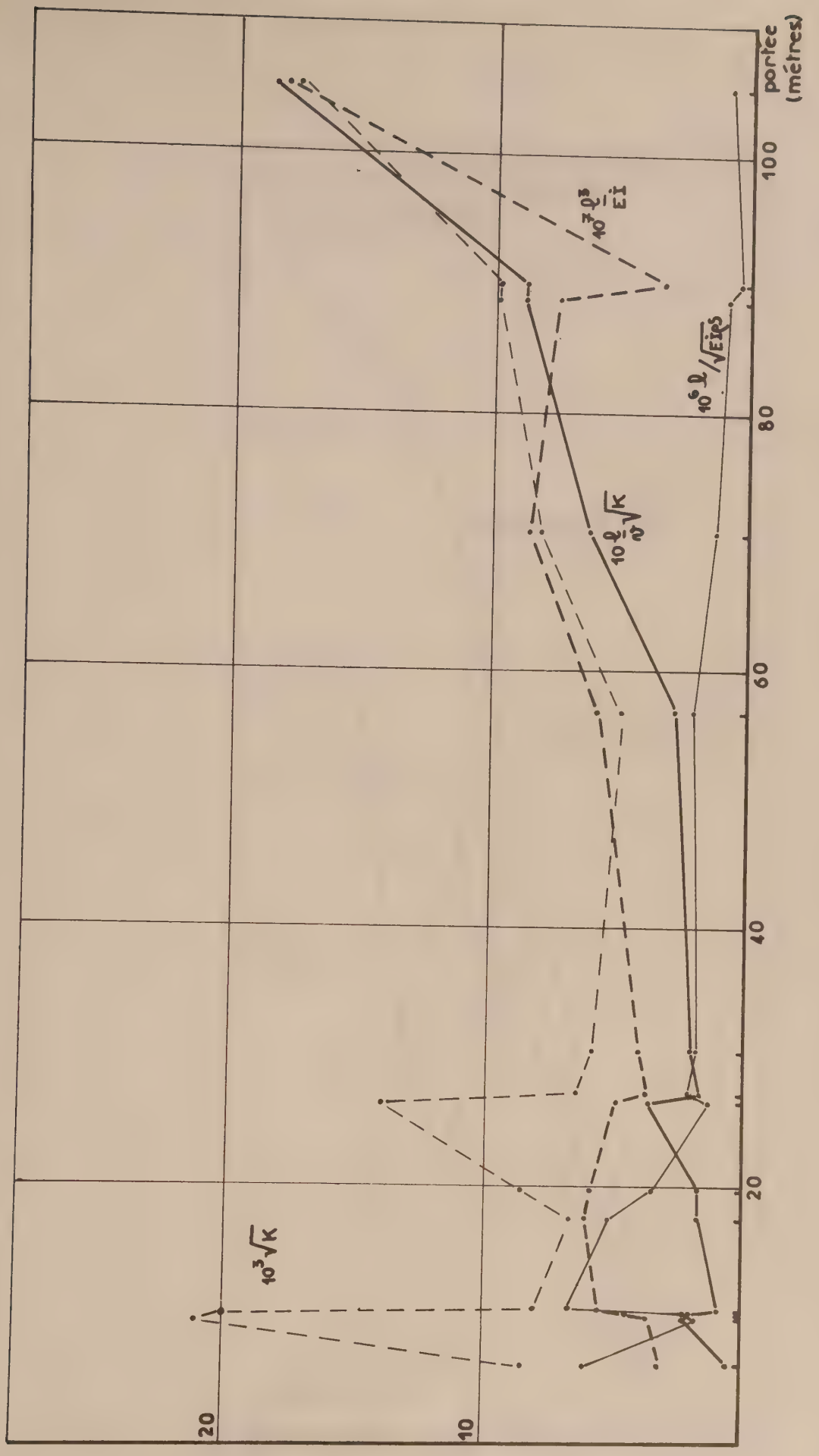
( 1 ):ORE D23/RP16 ( 2 ):FRYBA L._AICCF MAI 63

| pont | type | longueur L ( m ) | masse par unité de longueur ρS (kg/m) | inertie I ( $m^4$ ) | module d'élasticité E ($N/m^2$) | $\sqrt{K} = LV\sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$ (V=1m/s) | $\frac{L}{V}\sqrt{K}$ ( s ) | $\frac{L^3}{EI}$ (m/N) | $\frac{L}{\sqrt{EI\rho S}}$ ($\frac{m/s}{N}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LEZINNES | tabliers métalliques poutres sous rails 2 voies | 10,3 | $1,2 \times 10^3$ | $9,46 \times 10^{-3}$ | $2,1 \times 10^{11}$ | $8,005 \times 10^{-3}$ | $8,2451 \times 10^{-2}$ | $5,5005 \times 10^{-7}$ | $6,6710 \times 10^{-6}$ |
| ANGERVILLE | tablier mixte acier-béton | 26,4 | $1,07 \times 10^3$ | $177 \times 10^{-3}$ | — | $14,164 \times 10^{-3}$ | $37,3930 \times 10^{-2}$ | $4,9502 \times 10^{-7}$ | $1,3238 \times 10^{-6}$ |
| AUXONNE | tablier métallique | 17,4 | $1,3 \times 10^3$ | $41,035 \times 10^{-3}$ | — | $6,758 \times 10^{-3}$ | $11,7589 \times 10^{-2}$ | $6,11328 \times 10^{-7}$ | $5,1986 \times 10^{-6}$ |
| PAAR ( 1 ) | tablier métallique | 19,6 | $2,5 \times 10^3$ | $60,3 \times 10^{-3}$ | — | $8,709 \times 10^{-3}$ | $17,0696 \times 10^{-2}$ | $5,9461 \times 10^{-7}$ | $3,4835 \times 10^{-6}$ |
| PONT-DALLE EN BETON ( 1 ) | | 10 | $9,2 \times 10^3$ | $113,1 \times 10^{-3}$ | $0,2 \times 10^{11}$ | $20,167 \times 10^{-3}$ | $20,1670 \times 10^{-2}$ | $4,4209 \times 10^{-7}$ | $2,1921 \times 10^{-6}$ |
| PONT-TYPE Ra-DBA1 | tablier dalle pleine | 9,85 | $12,109 \times 10^3$ | $131,86939 \times 10^{-3}$ | $0,2 \times 10^{11}$ | $21,106 \times 10^{-3}$ | $20,7894 \times 10^{-2}$ | $3,6235 \times 10^{-7}$ | $1,7430 \times 10^{-6}$ |
| PONT n° 8 ( 2 ) | treillis membrures droites | 34,27 | $3 \times 10^3$ | $472 \times 10^{-3}$ | $2,1 \times 10^{11}$ | $5,962 \times 10^{-3}$ | $20,4318 \times 10^{-2}$ | $4,0605 \times 10^{-7}$ | $1,9873 \times 10^{-6}$ |
| — n°15 ( 2 ) | treillis membrures droites, double | 56,56 | $2,34 \times 10^3$ | $1602 \times 10^{-3}$ | $1,9 \times 10^{11}$ | $4,959 \times 10^{-3}$ | $28,0481 \times 10^{-2}$ | $5,9444 \times 10^{-7}$ | $2,1193 \times 10^{-6}$ |
| — n°6 ( 2 ) | treillis membrures droites | 27,08 | $3 \times 10^3$ | $249 \times 10^{-3}$ | $2,1 \times 10^{11}$ | $6,486 \times 10^{-3}$ | $17,5641 \times 10^{-2}$ | $3,7977 \times 10^{-7}$ | $2,1621 \times 10^{-6}$ |
| — n°2 ( 2 ) | ame pleine métallique | 6,26 | $1,44 \times 10^3$ | $3,69 \times 10^{-3}$ | — | $8,534 \times 10^{-3}$ | $5,3423 \times 10^{-2}$ | $3,1657 \times 10^{-7}$ | $5,9261 \times 10^{-6}$ |
| DON | treillis warren | 76,20 | $6,04 \times 10^3$ | 2,44 | — | $8,27 \times 10^{-3}$ | $63,0411 \times 10^{-2}$ | $8,6349 \times 10^{-7}$ | $1,3697 \times 10^{-6}$ |
| TRITH ST.-LÉGER | treillis Pratt | 88,74 | $11,8 \times 10^3$ | 4,46 | — | $9,96 \times 10^{-3}$ | $88,3899 \times 10^{-2}$ | $7,4611 \times 10^{-7}$ | $0,8441 \times 10^{-6}$ |

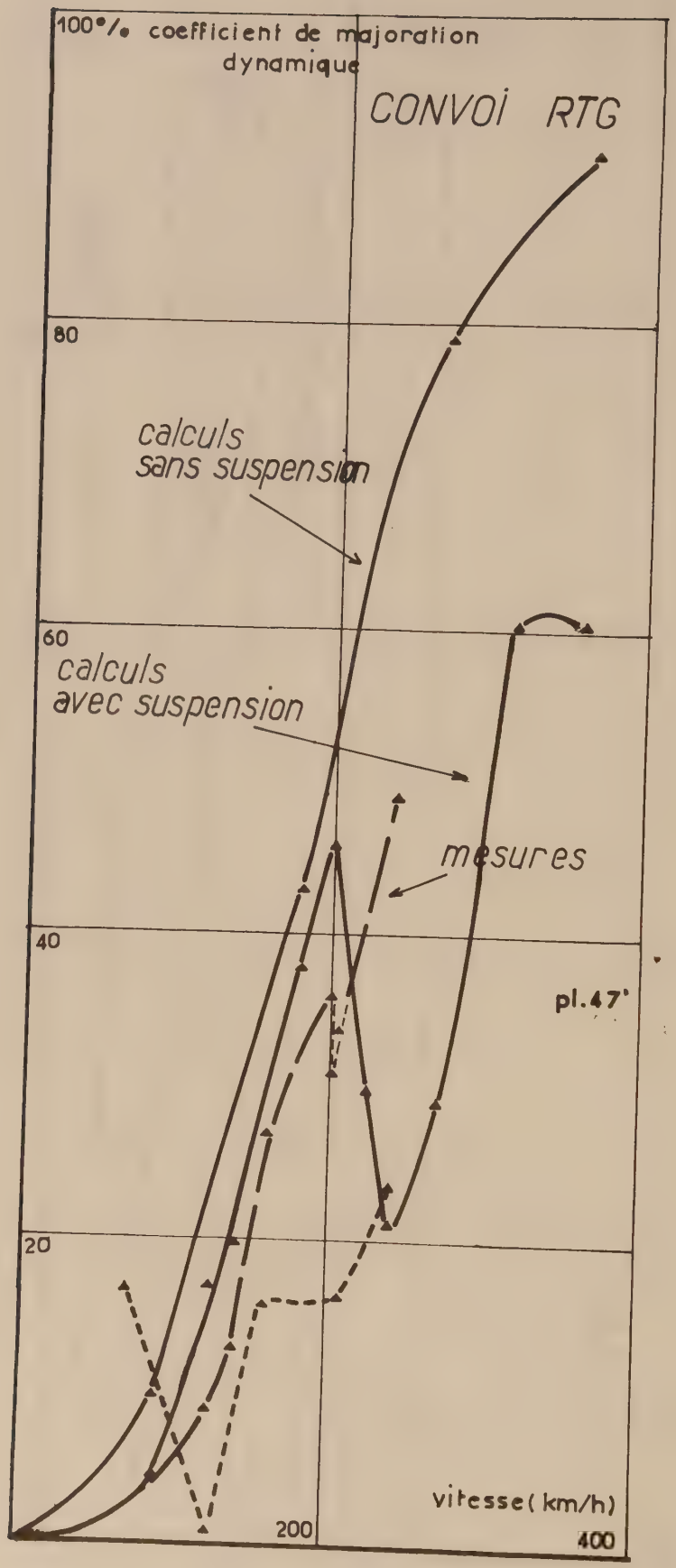
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ESCAUT | treillis multiple | 90 | $24,8 \times 10^{3}$ | 9,84 | $2,1 \times 10^{11}$ | $9,86 \times 10^{-3}$ | $88,7368 \times 10^{-2}$ | $3,5279 \times 10^{-7}$ | $0,3976 \times 10^{-6}$ |
| CERGY (1 travée) | tablier métallique | 105 | $18,2 \times 10^{3}$ | 3 | — | $17,8 \times 10^{-3}$ | $187,3890 \times 10^{-2}$ | $18,375 \times 10^{-7}$ | $0,9806 \times 10^{-6}$ |
| CERGY (2 travées) | — | 210 | $18,2 \times 10^{3}$ | 3 | — | $35,7 \times 10^{-3}$ | $749,7 \times 10^{-2}$ | $147 \times 10^{-7}$ | $1,9612 \times 10^{-6}$ |

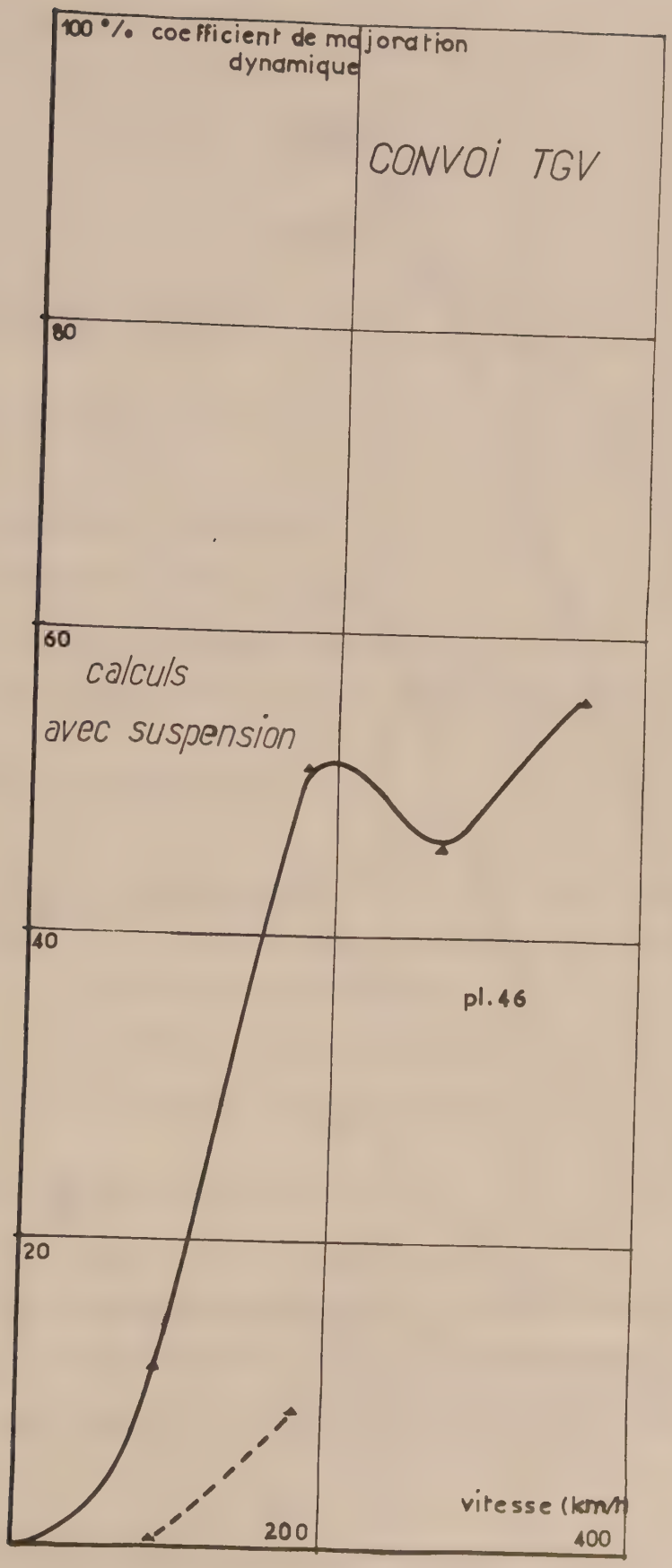


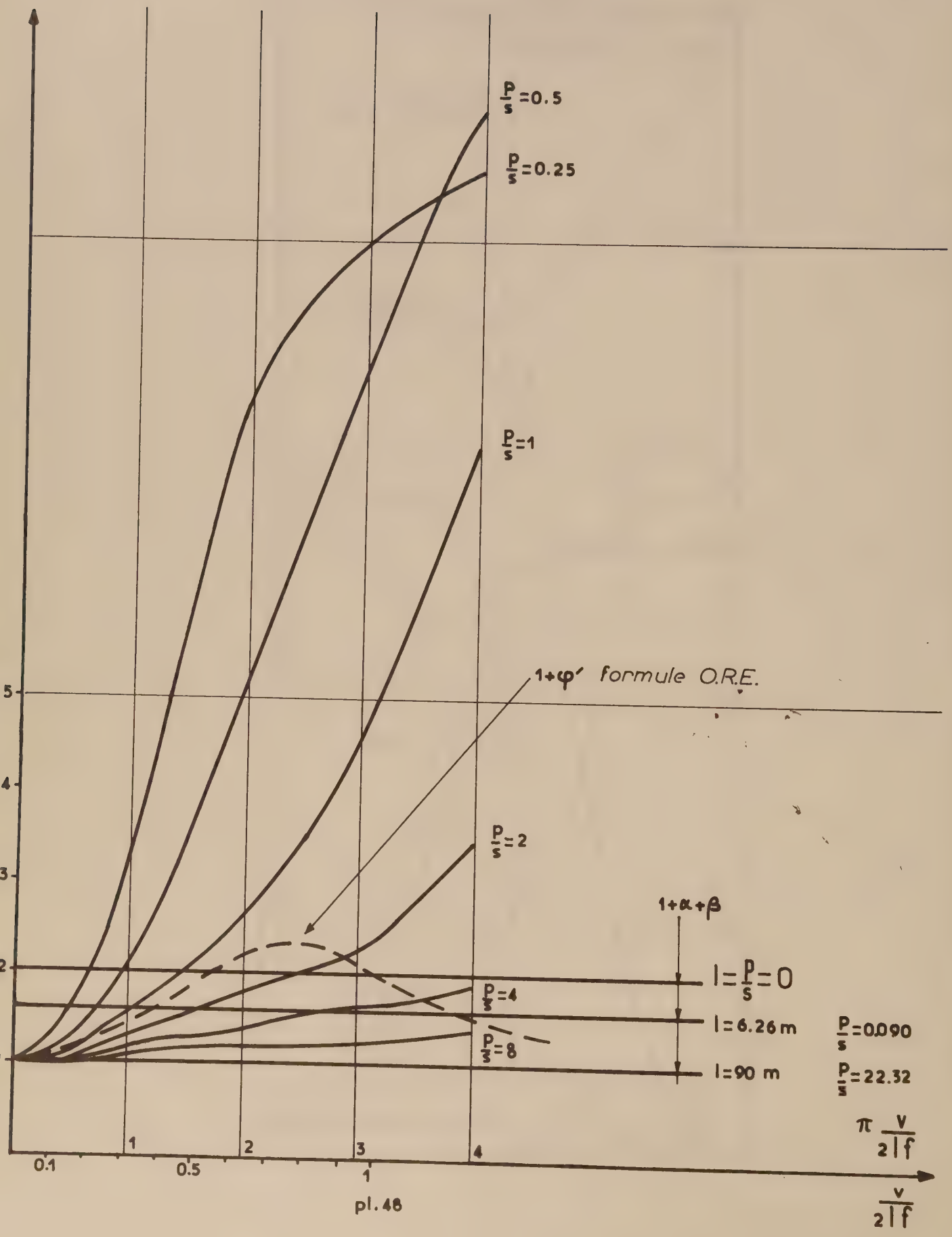
pl. 4 5


$10^3\sqrt{K}$
$10\frac{Q}{\Phi}\sqrt{K}$
$10^6 Q/\sqrt{EI^3}$
$10^7\frac{Q^3}{EI}$
20
10
20
40
60
80
100
poriez (mètres)

Pl. 45


100 % coefficient de majoration dynamique
CONVOI RTG
80
calculs sans suspension
60
calculs avec suspension
mesures
40
pl.47'
20
200
vitesse ( km/h)
400


100 % coefficient de majoration dynamique
CONVOI TGV
80
60
calculs
avec suspension
40
pl. 46
20
200
vitesse (km/h)
400


P/s=0.5
P/s=0.25
P/s=1
1+φ' formule O.R.E.
P/s=2
1+α+β
l=P/s=0
P/s=4
l=6.26 m
P/s=0.090
P/s=8
l=90 m
P/s=22.32
π V/2lf
5
4
3
2
1
0.1
0.5
1
2
3
4
V/2lf

pl. 48

# SOMMAIRE


I - POSITION DU PROBLEME p. 1

II - MISE EN EQUATION p. 5

1 - CONVENTIONS ET NOTATIONS p. 5

2 - EQUATION DE VIBRATION DU PONT p. 6

3 - EQUATIONS DU MOUVEMENT DU VEHICULE p. 7

4 - ECRITURE DES EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE p. 10

III - METHODE DE RESOLUTION p. 17

1 - HYPOTHESES DE REGULARITE ET ETUDE DES DISCONTINUITES DE LA SOLUTION p. 17

1.1 - HYPOTHESES DE REGULARITE p. 17

1.2 - ETUDE DES DISCONTINUITES DE LA SOLUTION p. 18

1.3 - REGULARITE DE LA FONCTION $\underline{F}_{im}(\tau)$ p. 20

2 - METHODE DES DIFFERENCES FINIES p. 21

2.1 - MAILLAGE ET DISCRETISATION p. 21

2.2 - DISCRETISATION SUR $\xi$ p. 24

2.2.1 - DERIVEES SECONDE $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$ p. 27

2.2.2 - DERIVEES TROISIEME $\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$ p. 29

2.2.3 - DISCONTINUITE $\Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$ p. 29

2.2.4 - DERIVEES QUATRIEME $\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4}$ p. 34

2.3 - DISCRETISATION SUR $\tau$ p. 36

2.3.1 - DERIVEES PARTIELLES $\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ p. 36

2.3.2 - DERIVEES $\frac{dU}{d\tau}$ p. 38

2.3.3 - DERIVEES $\frac{d^2 U}{d\tau^2}$ p. 39

2.4 - PRISE EN COMPTE DES SUSPENSIONS p. 39

2.4.1 - ETUDE DU MOUVEMENT DES VEHICULES ET CALCUL DES FORCES $\underline{F}_{im}(\tau)$ EXERCEES PAR LES ESSIEUX p. 39

2.4.2 - METHODE DE CALCUL DES TERMES INTEGRAUX p. 42

2.5 - CALCUL DES CONTRAINTES ET DU COEFFICIENT DE MAJORATION DYNAMIQUE p. 46

2.5.1 - DEFINITION DU COEFFICIENT DE MAJORATION DYNAMIQUE p. 46

2.5.2 - CALCUL DE $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$ p. 48

IV - ETUDE DE L'APPROXIMATION DE LA SOLUTION NUMERIQUE p. 49

1 - CONSISTANCE DE LA METHODE p. 49

2 - COMPARAISON DE LA METHODE DE DISCRETISATION UTILISEE AVEC LA METHODE DE DISCRETISATION DE L'OPERATEUR DE GREEN p. 51

3 - ESTIMATION ET MAJORATION DE L'ERREUR p. 56

3.1 - ERREUR $\delta U_1$ INTRODUITE PAR LA RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES p. 57

3.2 - DEPENDANCE DES CONDITION INITIALES ET STABILITE p. 59

3.3 - ERREUR SYSTEMATIQUE $\delta U_2$ p. 63

4 - CONCLUSION : CHOIX DU PAS p. 67

V - METHODE EXPERIMENTALE ET RESULTATS p. 68

1 - METHODE EXPERIMENTALE p. 68

2 - RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX p. 72

2.1 - RESULTATS DU CALCUL NUMERIQUE p. 72

2.1.1 - MASSE UNIQUE M NON SUSPENDUE SUR UNE POUTRE SUR DEUX APPUIS SIMPLES p. 73

2.1.2 - EFFET DE LA DISTANCE ENTRE LES CHARGES p. 74

2.1.3 - INFLUENCE DE LA SUSPENSION SUR RESSORTS ET AMORTISSEURS p. 74

2.1.4 - EFFETS PRODUITS PAR LA PRESENCE D'APPUIS INTERMEDIAIRES p. 75

2.2 - RESULTATS DES ESSAIS SUR MODELE REDUIT p. 76

2.3 - COMPARAISON ENTRE RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX p. 77

2.3.1 - COMPARAISON ENTRE CALCUL NUMERIQUE ET ESSAIS SUR MODELE p. 77

2.3.2 - COMPARAISON ENTRE CALCUL NUMERIQUE ET ESSAIS EN VOIE p. 80

2.3.2.1 - SCHEMATISATION DES CONVOIS REELS p. 80

2.3.2.2 - QUELQUES VALEURS NUMERIQUES CARACTERISTIQUES DES OUVRAGES REELS p. 81

2.3.2.3 - CARACTERISTIQUES DES VEHICULES REELS p. 82

2.3.2.4 - COMPARAISON ENTRE LE CALCUL ET LES ESSAIS DU PONT D'ANGERVILLE p. 83

2.3.3 - COMPARAISON ENTRE CALCUL NUMERIQUE ET FORMULES REGLEMENTAIRES p. 84

VI - CONCLUSION p. 87

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES 1, 2, 3, 4 : DISCRETISATION SUR $\xi$ ( p. 1 - 2 )

ANNEXE 1 : DERIVEES SECONDE $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$ ( p. 1 - 7 )

ANNEXE 2 : DERIVEES TROISIEME $\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$ ( p. 1 - 5 )

ANNEXE 3 : DISCONTINUITE $\Delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$ ( p. 1 - 6 )

ANNEXE 4 : DERIVEES QUATRIEME $\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4}$ ( p. 1 - 4 )

ANNEXE 5 : DISCRETISATION SUR $\tau$ ( p. 1 - 10 )

ANNEXE 6 : PRISE EN COMPTE DES SUSPENSIONS ( p. 1 - 5 )

ANNEXE 7 : PLANCHES DE RESULTATS (Chapitre V) ( p. 1 - 50 )

# ERRATUM

au chapitre IV le terme du second membre de l'équation 1.4 représentant la flèche U à l'abscisse $\xi$ produite par la charge concentrée appliquée à l'abscisse $\sigma$ n'est pas constant mais varie en fonction de $\xi$.

en dehors de l'estimation sur la borne inférieure m de $\|\bar{A}^{-1}\|$ les résultats du chapitre demeurent cependant valables, à condition de remplacer $G(\sigma,\sigma)$ par $G(\xi,\sigma)$ et $G_{j-1,j-1}$ par $G_{i,j-1}$.